

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

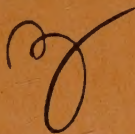
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Bernard PESEUX

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



**1^{ère} Thèse : METHODE DES ELEMENTS FINIS : APPLICATIONS A LA RECHERCHE
DES MAJORATIONS DE CONTRAINTES DANS LES STRUCTURES PLANES.**

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 5 juin 1971 devant la Commission d'Examen

MM. TARDY Président

VILAINE	}	Examineurs
ABSI		
FINE		

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

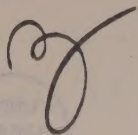
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Bernard PESEUX

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : METHODE DES ELEMENTS FINIS : APPLICATIONS A LA RECHERCHE
DES MAJORATIONS DE CONTRAINTES DANS LES STRUCTURES PLANES.

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 5 juin 1971 devant la Commission d'Examen

MM. TARDY Président

VILAINE
ABSI
FINE } Examineurs

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

• • • • •

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs

M. BRILLOUET Mathématiques

M. MOLINARO

M. PAUC

M. PETRESCO

M. RAFFIN

M. VIVIER (E.N.S.M.)

M. TARDY (E.N.S.M.)

M. RAVILLY (E.N.S.M.)

Mécanique

M. AVIGNON

M. BOULLLOUD

M. COLLET

M. MINN

M. MEZEN CEV (E.N.S.M.)

M. MOUTON

Physique

M. DUNOYER

M. GRAFF

M. PIERI

M. QUINIOU

M. WOJTKOWIAK

Chimie

Melle DEBRAU X

M. GARRIGUES

Mme LE DOUARIN

M. LE DOUARIN

M. SELLIER

Biologie

M. CAVET

Sciences de la Terre

Professeurs sans chaire**M. MEYER****Mathématiques****M. BARDON****Physique****M. GOUREAUX**

«

M. LASKAR

«

Melle OFFRET (E.N.S.M.)

«

M. GOBIN (E.N.S.M.)**Chimie****M. MARTIN**

«

M. ROUXEL

«

M. TOURNOUX

«

M. DUPONT**Biologie****M. SAU DRAY**

«

M. OTTMANN**Sciences de la Terre****Maîtres de Conférences****M. FOUQUES****Mathématiques****M. IBISCH**

«

M. LAMEAU (E.N.S.M.)

«

M. LEBORGNE

«

M. GUEVEL (E.N.S.M.)**Mécanique****M. SULMONT (E.N.S.M.)**

«

M. VILAINE (E.N.S.M.)

«

M. CAILLER (I.U.T.)**Physique****M. COTTU (I.U.T.)**

«

M. LE BIHAN

«

M. LE CORRE (I.U.T.)

«

M. LONCKE

«

M. ROSIER

«

M. BOUCHY (I.U.T.)**Chimie****M. CHABANNEL**

«

Mme MARTIN

«

M. POINTEAU (E.N.S.M.)

«

M. AMOURIQ**Biologie****M. LEBRUN**

«

Mme NICOLAS-PRATT

«

M. FORESTIER**Sciences de la Terre****M. NICOLAS**

«

Secrétaire Général : M. LERAY

Le présent travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique
des Matériaux dirigé par Monsieur D. TARDY, Directeur de l'École Nationale
Supérieure de Mécanique, à qui je tiens à exprimer toute ma reconnaissance
pour m'avoir inspiré et encouragé et permis de le mener à bien.

Je remercie Monsieur AMI, Fils de VILLAGE qui m'a fait
l'honneur de participer au jury.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à mes parents, à mes frères,
à mes amis, en particulier, mes collègues et le personnel technique de
l'école, le personnel du Centre de Calcul ainsi que les personnes qui
ont participé à la présentation de ce mémoire.

A mes parents

A ma femme

I - NOTIONS GÉNÉRALES

1.1 - Définitions - Notions	1
1.2 - Opérations sur les matrices	2
1.3 - Matrices carrées	3
1.3.1 Matrices diagonales	3
1.3.2 Matrices symétriques	4
1.3.3 Matrices inverses	4
1.3.4 Matrices orthogonales	5
1.3.5 Matrices triangulaires	5

II - MÉTHODES DE RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

2.1 - Méthode de Gauss-Jordan	6
2.2 - Méthode de Gauss-Seidel	6
2.3 - Méthode de Crout	12

III - APPLICATIONS

Le présent travail a été effectué au Laboratoire de Résistance des Matériaux, dirigé par Monsieur D. TARDY, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, à qui je tiens à exprimer toute ma reconnaissance pour m'avoir inspiré ce travail et permis de le mener à bien.

Je remercie Messieurs ABSI, FINE et VILAINÉ qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à ceux qui, à divers titres, m'ont aidé, en particulier, mes collègues et le personnel technique de Laboratoire, le personnel du Centre de Calcul ainsi que les personnes qui ont participé à la présentation de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

	Pages
I - RAPPELS MATRICIELS	
1.1 - Définition - Notation	1
1.2 - Opérations sur les matrices	1
1.3 - Matrices carrées	1
1.3.1 Matrice diagonale	
1.3.2 Matrice symétrique	
1.3.3 Matrice bande	
1.3.4 Matrice inverse	
1.3.5 Matrices triangulaires	
II - METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES	4
2.1 - Méthode de Gauss-Jordan	4
2.2 - Méthode de Gauss-Seidel	8
2.3 - Méthode de Choleski	12
III - THEOREMES GENERAUX	
3.1 - Equation de base de l'élasticité	16
3.1.1 Equations déformations-déplacements	
3.1.2 Relations contraintes-déformations	
3.1.3 Equations d'équilibre	
3.1.4 Equation de compatibilité	
3.2 - Les principes variationnels en Mécanique des Milieux continus	20
3.2.1 Principe variationnel général	
3.2.2 Principe de Reissner	
3.2.3 Principe de l'énergie potentielle minimum	
3.2.4 Principe de l'énergie complémentaire minimum	
IV - METHODE DES ELEMENTS FINIS - ETUDE THEORIQUE	
4.1 - Introduction - Historique	23
4.2 - Notations	26
4.3 - Hypothèses - Mode opératoire	27
4.3.1 Idéalisation de la structure	
4.3.2 Choix de la fonction déplacement	
4.22.1 Méthode dite "des contraintes"	
4.22.2 Méthode dite "des déplacements"	
4.3.3 Assemblage de la structure	

4.4 - Méthode des Eléments Finis appliquée aux problèmes plans	30
4.4.1 Mise en équation des caractéristiques d'un élément fini	30
4.41.1 Fonction déplacement	
4.41.2 Déformations	
4.41.3 Contraintes	
4.41.4 Forces modales équivalentes	
4.4.2 Elément triangulaire à 6 degrés de liberté	34
4.42.1 Caractéristiques de l'élément	
4.421.1 Fonction déplacement	
4.421.2 Déformations	
4.421.3 Matrice élasticité	
4.421.4 Matrice raideur	
4.4.3 Autres types d'éléments caractéristiques	42
4.43.1 Elément rectangulaire à 8 degrés de liberté	42
4.43.2 Elément triangulaire à 6 noeuds - 12 degrés de liberté	45
4.5 - Méthode des éléments finis appliqués aux problèmes de révolution	47
4.5.1 Introduction	47
4.5.2 Fonction déplacement	47
4.5.3 Déformations	48
4.5.4 Contraintes - Matrice élasticité	49
4.5.5 Matrice raideur élémentaire	50
4.5.6 Matrice raideur totale	54
4.5.7 Calcul des contraintes	54
4.6 - Méthode des éléments finis pour les problèmes à 3 dimensions	55
4.6.1 Fonction déplacement	55
4.6.2 Déformation	57
4.6.3 Contraintes	57
4.6.4 Matrice raideur élémentaire	58
4.6.5 Matrice raideur totale	58
V - METHODE DES ELEMENTS FINIS - APPLICATIONS PRATIQUES	59
5.1 - Mise au point d'un programme	60
5.1.1 Idéalisation de la structure	60
5.1.2 Calcul des caractéristiques de chaque élément	61
5.1.3 Assemblage de la structure	67

5.1.4	Programme de calcul	72
5.14.1	Formation de la matrice raideur $ K $	
5.14.2	Introduction des forces	
5.14.3	Introduction des déplacements imposés	
5.14.4	Résolution du système d'équations linéaires.	
5.14.5	Calcul des contraintes	
5.14.6	Améliorations du programme	
5.1.5	Etude de convergence - Précision de la méthode	84
5.15.1	Modèle déplacement	
5.15.2	Modèle équilibre	
5.15.3	Modèle mixte	
5.15.4	Limites supérieures et inférieures des déformations.	
5.15.5	Etude mathématique de l'erreur	
5.15.6	Etude pratique de la convergence	
5.2	Etude des majorations de contraintes dans des plaques percées	96
5.2.1	Plaques percées de trous circulaires	101
5.21.1	Influence du diamètre du trou sur les majorations de contraintes	
5.21.2	Influence de la longueur de la plaque sur les majorations de contraintes	
5.21.3	Influence de bossages sur les majorations de contraintes	
5.21.4	Influence de raidisseurs sur les majorations de contraintes	
5.2.2	Plaques percées de trous elliptiques	117
5.22.1	Etude des majorations lorsque les 2 axes varient	
5.22.2	Etude des majorations lorsqu'un seul axe varie	
5.3	Etude de problèmes industriels	126
5.3.1	Etude d'un tirant de Presse	126
5.3.2	Etude d'une crémaillère	126
5.32.1	Etude par la méthode des éléments finis	
5.321.1.1	Symétrie des réactions	
5.321.1.2	Symétrie des déplacements	
5.32.2	Etude par la photoélasticité	

I - RAPPELS MATRICIELS

1.1 - DEFINITION - NOTATION -

Une matrice de dimensions (p,q) est un tableau rectangulaire de p lignes et q colonnes.

L'élément appartenant à la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne est repéré a_{ij} .

Cette matrice est notée $|a_{ij}|$ ou plus simplement $|A|$.

1.2 - OPERATIONS SUR LES MATRICES

(voir tableau page suivante).

1.3 - MATRICES CARREES

Ce sont des matrices de dimensions (n,n) .

1.3.1 Matrice diagonale

$$(n) \quad \begin{vmatrix} a & & & \\ & b & & 0 \\ & & c & \\ 0 & & & d \end{vmatrix}$$

(n)

Matrice diagonale

Matrice unité $|I|$

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \quad (n)$$

(n)

Matrice unité

1.3.2 Matrice symétrique

Une matrice est symétrique lorsque :

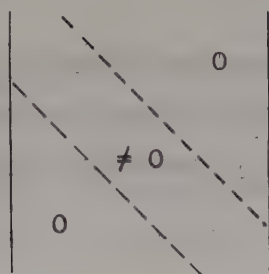
$$a_{ij} = a_{ji}$$

Opérations	Matrice (1)		Matrice (2)		Résultat		Propriétés
	Notée	Dimen- sions	Notée	Dimen- sions	Noté	Dimen- sions	
Egalité	$ A $	p, q	$ B $	p, q	$ A = B $		$a_{ij} = b_{ij}$
Addition	$ A $	p, q	$ B $	p, q	$ C = A + B $	p, q	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
Multiplication par un scalaire	$ A $	p, q			$ C = \lambda A $	p, q	$c_{ij} = \lambda a_{ij}$
Produit de 2 matrices	$ A $	p, q	$ B $	q, r	$ C = A \cdot B $	p, r	$c_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik} \cdot b_{kj}$ - non commutatif $ A \cdot B \neq B \cdot A $ - associatif $ A (B \cdot C) = (A \cdot B) C $ - Distributif par rapport à l'addition $ C \cdot (A + B) = C A + C B $
Transposition	$ A $	p, q			$ C = A ^T$	q, p	$c_{ij} = a_{ji}$
Transposition d'un produit	$ A $	p, q	$ B $	q, r	$ C ^T = (A \cdot B)^T$	r, q	$ C ^T = B ^T A ^T$
Dérivée d'une matrice	$ A $	p, q			$ C = \frac{d}{dt} A $	p, q	$c_{ij} = \frac{d}{dt} a_{ij}$
Intégrale d'une matrice	$ A $	p, q			$ C = \int_v A dv$		$c_{ij} = \int_v a_{ij} dv$

Propriété : si A (n,n) est symétrique, quelque soit B ,(n,p)

$$C = B^T A B \text{ est symétrique.}$$

1.3.3 Matrice bande



Les coefficients non nuls forment une bande.

1.3.4 Matrice inverse

Une matrice notée $|A^{-1}|$ est l'inverse de $|A|$ si

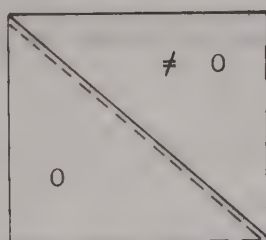
$$|A^{-1}| \cdot |A| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I|$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{\det |A|} |\tilde{A}|^T$$

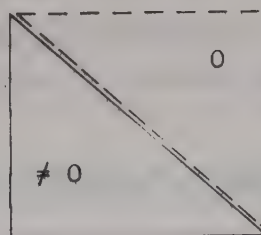
$|\tilde{A}|$ étant la matrice adjointe de $|A|$ (matrice obtenue en remplaçant chaque terme par son mineur).

$|A^{-1}|$ n'existe que si $|A|$ est régulière, c'est-à-dire si $\det |A| \neq 0$.

1.3.5 Matrices triangulaires



Matrice
triangulaire
supérieure



Matrice
triangulaire
inférieure

II - METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

(Réf. |1| et |2|)

L'étude des structures par la méthode des éléments finis conduit à exprimer les déplacements $|U|$ de la structure en fonction des forces extérieures $|F|$; Ces deux matrices vérifient la relation fondamentale :

$$|F| = |K| |U|$$

$|K|$ étant la matrice raideur de la structure. Elle présente les particularités suivantes :

- Matrice symétrique
- Matrice bande

$|K|$ devant être inversée, il y aura intérêt à adopter des méthodes utilisant ses particularités.

Trois Méthodes pourront être utilisées :

- 1 - Méthode directe de triangulation (Méthode de Gauss-Jordan)
- 2 - Méthode itérative de Gauss-Seidel
- 3 - Méthode de Choleski

Ces trois Méthodes conduisent à des résultats équivalents, le choix de la Méthode adoptée sera fonction essentiellement du problème traité et des capacités de l'ordinateur.

2.1 - METHODE DE GAUSS-JORDAN -

C'est une méthode intéressante, car d'une part elle est relativement simple à mettre en oeuvre, d'autre part le processus général que nous allons expliquer sur un système d'équations linéaires, s'applique également à un système d'équations matricielles.

De plus cette méthode directe conduit à la solution exacte.

Soit à résoudre le système d'équations linéaires :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \quad (1-1)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \quad (1-2)$$

$$(I) \quad a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 \quad (1-3)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \quad (1-n)$$

La Méthode de Gauss-Jordan consiste à rendre le système (I) équivalent au système (II) suivant :

$$a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + \dots + a'_{1n} x_n = b'_1 \quad (2-1)$$

$$a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2 \quad (2-2)$$

$$(II) \quad a'_{33} x_3 + \dots + a'_{3n} x_n = b'_3 \quad (2-3)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ a'_{nn} x_n = b'_n \end{array} \quad (n-n)$$

Pour obtenir ce système (II), nous éliminons l'inconnue x_1 dans les équations (1-2), (1-3), ... (1-n).

L'élimination de x_1 dans l'équation (1-2) se fait de la manière suivante :

- multiplication de l'équation (1-1) par $-a_{21}$

- multiplication de l'équation (1-2) par a_{11}

(a_{11} est le pivot de l'équation (1-1))

- remplacement de l'équation (1-2) par la somme des équations (1-1) et (1-2) modifiées, le résultat s'écrit :

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11}) + x_2(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) + \dots + x_n(a_{2n}a_{11} - a_{21}a_{1n}) \\ = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{aligned}$$

ou encore :

$$0 x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}$$

en posant

$$a_{2j}^{(1)} = a_{11}^{(0)} a_{2j}^{(0)} - a_{21}^{(0)} a_{1j}^{(0)}$$

$$j = 2, 3, 4, \dots, n$$

$a_{11}^{(0)}, a_{2j}^{(0)}, \dots$ étant les coefficients du système (I).

L'élimination de l'inconnue x_1 dans les équations (1-3), (1-4), ... (1-n) se fait de manière analogue et nous obtenons le système $(I^{(1)})$ suivant :

$$\begin{array}{rcl} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} & (1-1^{(1)}) \\ a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} & (1-2^{(1)}) \\ (I^{(1)}) \quad a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)} x_n = b_3^{(1)} & (1-3^{(1)}) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_n + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} & (1-n^{(1)}) \end{array}$$

Les nouveaux coefficients $a_{ij}^{(1)}$ se calculant par l'algorithme suivant :

$$a_{ij}^{(1)} = a_{11}^{(0)} a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(0)} a_{1j}^{(0)}$$

avec $i = 2, 3, 4, \dots, n$

$j = 2, 3, 4, \dots, n$

$a_{ij}^{(0)}$: coefficients du système (I)

On reprend le même processus pour éliminer l'inconnue x_2 dans les équations $(1-3^{(1)})$, $(1-4^{(1)})$, ..., $(1-n^{(1)})$ et nous obtenons le système $(I^{(2)})$:

$$\begin{aligned}
 & a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \quad (1-1^{(2)}) \\
 & a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \quad (1-2^{(2)}) \\
 & a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)} \quad (1-3^{(2)}) \\
 & a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 + \dots + a_{4n}^{(2)} x_n = b_4^{(2)} \quad (1-4^{(2)}) \\
 & \vdots \\
 & a_{n3}^{(2)} x_3 + a_{n4}^{(2)} x_4 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \quad (1-n^{(2)})
 \end{aligned}$$

Les coefficients $a_{ij}^{(2)}$ se calculant par l'algorithme suivant :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{22}^{(1)} a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} a_{2j}^{(1)}$$

$$i = 3, 4, \dots, n \text{ et } j = 3, 4, \dots, n$$

D'une manière générale nous pourrions éliminer l'inconnue x_k dans les équations $(1-k+1^{(k-1)})$, ..., $(1-n^{(k-1)})$ en calculant les coefficients $a_{ij}^{(k)}$ par l'algorithme général :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}$$

$$\text{avec } i = k+1, \dots, n$$

$$j = k+1, \dots, n$$

Et finalement après élimination de l'inconnue x_{n-1} dans l'équation $(1-n^{(n-2)})$ nous obtenons le système (II) :

$$a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \quad (2-1)$$

$$a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \quad (2-2)$$

$$a_{kk}^{(k-1)} x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)} x_n = b_k^{(k-1)} \quad (2-k)$$

$$a_{nn}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)} \quad (2-n)$$

Les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ s'obtiennent par simple substitution, en effet on calcule x_n dans (2-n), on reporte cette valeur dans (2-n-1) qui s'exprime alors uniquement en fonction de x_{n-1} .

On pourra ainsi de proche en proche remonter jusqu'au calcul de x_1 .

Cette méthode applicable sur des scalaires peut également être utilisée pour un système d'équations matricielles.

2.2 - METHODE DE GAUSS-SEIDEL -

2.2.1 Principe

C'est une méthode qui permet de résoudre les systèmes d'équations linéaires par itération. Nous allons en monter le principe sur un exemple.

Soit à résoudre le système d'équations suivant :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad (2)$$

Soit (x_0, y_0) un couple de valeurs arbitraires des inconnues.

Si nous reportons ces valeurs dans l'équation (1), elle n'est pas vérifiée et elle s'écrit :

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = R_x^1 \quad R_x^1 \neq 0$$

R_x^1 est appelé résidu de la première équation à l'itération numéro 1.

Déterminons la valeur x_1 telle que le couple (x_1, y_0) vérifie l'équation (1), x_1 est déterminée en résolvant :

$$a_1 x_1 + b_1 y_0 + c_1 = 0$$

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = R_x^1$$

soit par soustraction

$$x_1 - x_0 = \frac{R_x^1}{a_1}$$

Si on reporte ce couple (x_1, y_0) qui vérifie l'équation (1) dans l'équation (2), celle-ci n'est pas vérifiée et s'écrit :

$$a_2 x_1 + b_2 y_0 + c_2 = R_y^1 \quad R_y^1 \neq 0$$

R_y^1 est le résidu de l'équation (2) à la première itération.

On détermine alors la valeur y_1 telle que le couple (x_1, y_1) vérifie l'équation (2).

On a alors :

$$a_2 x_1 + b_2 y_0 + c_2 = R_y^1$$

$$a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 = 0$$

$$\text{et } y_1 - y_0 = \frac{R_y^1}{b_2}$$

A partir du couple (x_1, y_1) on reprend le processus et on détermine ainsi de proche en proche

$$x_2, y_2 \quad ; \quad x_3, y_3 \quad ; \quad \dots$$

On démontre que moyennant certaines conditions, les suites :

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

et $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$

convergent vers la solution exacte du système.

2.2.2 Formulation générale

Soit à résoudre le système de n équations à n inconnues :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + b_1 = 0$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + b_2 = 0$$

.

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n + b_n = 0$$

soient $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ les valeurs initiales choisies pour les inconnues.

On forme le résidu de la première équation

$$R_1^1 = a_{11} x_1^0 + a_{12} x_2^0 + \dots + a_{1n} x_n^0 + b_1$$

R_1^1 résidu de la première équation à la première itération.

On modifie la première inconnue et elle seule en lui donnant une valeur x_1^1 telle que

$x_1^1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$ vérifient la première équation c'est-à-dire telle que

$$a_{11} x_1^1 + a_{12} x_2^0 + \dots + a_{1n} x_n^0 + b_1 = 0$$

$$\text{On obtient donc } x_1^1 = x_1^0 - \frac{R_1^1}{a_{11}}$$

On reporte les inconnues $x_1^1, x_2^0, \dots, x_n^0$ dans la deuxième équation et on forme le résidu R_2^1 .

$$R_2^1 = a_{21} x_1^1 + a_{22} x_2^0 + \dots + a_{2n} x_n^0 + b_2$$

On calcule x_2 et x_2 seule telle que

$x_1^1, x_2^1, x_3^0, \dots, x_n^0$ vérifient l'équation (2)

$$\text{On obtient donc } x_1^1 = x_1^0 - \frac{R_1^1}{a_{11}}$$

On reporte les inconnues $x_1^1, x_2^0, \dots, x_n^0$ dans la deuxième équation et on forme le résidu R_2^1 .

$$R_2^1 = a_{21} x_1^1 + a_{22} x_2^0 + \dots + a_{2n} x_n^0 + b_2$$

On calcule x_2 et x_2 seule telle que

$x_1^1, x_2^1, x_3^0, \dots, x_n^0$ vérifient l'équation (2)

$$\text{On obtient } x_2^1 = x_2^0 - \frac{R_2^1}{a_{22}}$$

On reporte $x_1^1, x_2^1, x_3^0, \dots, x_n^0$ dans la troisième équation on peut alors calculer x_3^1 . Et on poursuit ainsi le processus, par exemple pour la $i^{\text{ème}}$ équation on reporte :

$x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_{i-1}^1, x_i^0, \dots, x_n^0$ dans cette équation, on calcule le résidu

$$R_i^1 = a_{i1} x_1^1 + a_{i2} x_2^1 + \dots + a_{ii} x_i^0 + \dots + a_{in} x_n^0$$

On calcule alors x_i^1

$$x_i^1 = x_i^0 - \frac{R_i^1}{a_{ii}}$$

Lorsqu'on aura calculé l'inconnue x_n^1 , on reprendra le processus à partir de l'équation (1) avec pour valeurs initiales des inconnues :

$$x_1^1, x_2^1, \dots, x_i^1, \dots, x_n^1$$

On calculera alors pour cette deuxième itération les valeurs $x_1^2, x_2^2, \dots, x_i^2, \dots, x_n^2$. des inconnues. A la $j^{\text{ème}}$ itération, nous obtenons la formule de récurrence suivante :

$$x_i^P = x_i^{P-1} - \frac{R_i^P}{a_{ii}}$$

avec x_i^{P-1} : valeur de l'inconnue x_i à la $(p-1)^{\text{ème}}$ itération

x_i^P : valeur de l'inconnue x_i à la $p^{\text{ème}}$ itération

R_i^P : valeur du résidu à la $p^{\text{ème}}$ itération.

Le processus sera interrompu dès que le résidu sera suffisamment faible.

La convergence de la méthode peut-être accélérée en employant la formule de récurrence suivante :

$$x_i^P = x_i^{P-1} - \lambda \frac{R_i^P}{a_{ii}}$$

où λ est appelé facteur de relaxation. On démontre que ce facteur doit être compris entre 0 et 2. (En pratique on peut prendre 1,8) (Réf. |2|)

2.3 - METHODE DE CHOLESKI -

Cette méthode permet de résoudre d'une manière directe les systèmes d'équations linéaires.

2.3.1 Principe

Soit à résoudre un système d'équations linéaires :

$$|Y| = |A| |X| \quad - 1 -$$

$|A|$ étant une matrice carrée (n,n) , symétrique, régulière à coefficients réels.

$|Y|$ une matrice colonne $(n,1)$, réelle

$|X|$ une matrice colonne $(n,1)$, réelle

Le raisonnement peut-être fait avec des matrice $|Y|$ et $|X|$ rectangulaires (n,p) , il suffira de traiter p fois le problème.

En général, $|A|$ est décomposable en un produit de 2 matrices triangulaires supérieure et inférieure $|M|$ et $|M|^T$.

$$\text{C'est-à-dire : } |A| = |M|^T |M|$$

Le système - 1 - s'écrit alors

$$|Y| = |M|^T |M| |X| \quad - 2 -$$

$|A|$ est régulière, donc $\det|A| \neq 0$

$$\text{D'autre part } \det|M|^T = \det|M|$$

$$\text{Or } \det|A| = \det|M|^T \cdot \det|M| = (\det|M|)^2$$

Donc $\det|M| \neq 0$ et $|M|$ peut être inversée.

Donc le système - 2 - peut s'écrire

$$(|M|^T)^{-1} |Y| = |M| |X|$$

$$\text{ou en posant } |Z| = |M| |X|$$

$$(|M|^T)^{-1} |Y| = |Z|$$

$$\text{soit } |Y| = |M| |Z| \quad - 3 -$$

$|M|^T$ étant une matrice triangulaire inférieure, ce système - 3 - se résoud par simple descente.

$$(n) \begin{vmatrix} Y \end{vmatrix} = (n) \begin{vmatrix} & & 0 \\ & & \\ M^T & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Z \end{vmatrix} (n)$$

(1) (n) (1)

De même le système $|Z| = |M| |X|$ se résoud par simple remontée.

La méthode comprendra donc 3 parties :

- 1 - Calcul de la matrice $|M|$, donc $|M|^T$
- 2 - Calcul de la matrice colonne $|Z|$ en résolvant par simple descente le système

$$|Y| = |M|^T |Z|$$
- 3 - Calcul de la matrice colonne $|X|$ en résolvant par simple remontée le système

$$|Z| = |M| |X|$$

2.3.2 Calcul de la matrice $|M|$ triangulaire supérieure

Les éléments de $|M|$ se calculent ligne par ligne, pour la première ligne en commençant par le coefficient m_{11} pour la deuxième ligne en commençant par le coefficient m_{22} pour la troisième ligne en commençant par le coefficient m_{33} etc.

Ces coefficients se calculant par les formules suivantes :

$$\text{1ère ligne} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ m_{1j} = \frac{a_{1j}}{m_{11}} \quad j = 2, 3, 4, \dots, n \end{array} \right.$$

$$\text{2ème ligne} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{22} = \sqrt{a_{22} - m_{12}^2} \\ m_{2j} = (a_{2j} - m_{12} m_{1j}) / m_{22} \quad j = 3, 4, \dots, n \end{array} \right.$$

Et d'une manière générale pour la

$$\text{pème ligne} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{pp} = \sqrt{a_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} (m_{kp})^2} \\ m_{pj} = |a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} m_{kp} m_{kj}| / m_{pp} \quad j = p+1, \dots, n \end{array} \right.$$

Il subsiste une indétermination dans le calcul des m_{pp} , on choisit le signe + devant les radicaux.

2.3.3 Calcul de la matrice colonne $|Z|$

Le calcul de la matrice $|Z|$ se fait comme nous l'avons vu par simple descente :

$$|Y| = |M^T| \cdot |Z|$$

La formule permettant de calculer les éléments de Z s'écrit :

$$Z_i = (Y_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} m_{ji} z_j) / m_{ii}$$

2.3.4 Calcul de la matrice colonne $|X|$

Nous avons le système $|Z| = |M| \cdot |X|$, la formule permettant de calculer les éléments de $|X|$ s'écrit :

$$X_i = (Z_i - \sum_{j=i-1}^{j=n} m_{ij} X_j) / m_{ii}$$

III - THEOREMES GENERAUX

3.1 - EQUATIONS DE BASE DE L'ELASTICITE -

3.1.1. Equations - Déformations - Déplacements

La déformée d'une structure élastique sous l'action d'un système de forces et d'une distribution de température peut être complètement décrite par le vecteur déplacement $\vec{u}$ de composantes u_i (P), fonctions des coordonnées (x, y, z) du point P de la structure.

En désignant par e_{ij} (P) le tenseur des déformations, la relation entre déformations et déplacements, s'écrit en coordonnées rectilignes (Réf [3])

$$e_{ij} (P) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u^k) \quad 3-11-1$$

$$\partial_i = \text{opérateur différentiel } \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et en utilisant la convention de sommation d'Einstein :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a^{ik} b_{kj}$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre 2, l'expression précédente s'écrit :

$$e_{ij} (P) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

soit
$$e_{11} (\epsilon_x) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \quad \text{de même } e_{22} (\epsilon_y) \text{ et } e_{33} (\epsilon_z)$$

$$e_{12} (\epsilon_{xy}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad \gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy}$$

- Expression de la dilatation cubique.

Dans le cas de l'approximation linéaire :

$$\theta = e_k^k$$

3.1.2 Relations contraintes- Déformations

En ne tenant pas compte des contraintes et des déformations thermiques, dans le cas de l'approximation linéaire, on a une relation linéaire entre les composantes du tenseur des contraintes et celles du tenseur des déformations : elle exprime la loi de Hooke.

Pour un matériau homogène et isotrope ces relations s'écrivent :

$$t^{ij} = \lambda \theta g^{ij} + 2\mu e^{ij} \quad 3-12-1$$

λ et μ : coefficient de Lamé

g^{ij} : composantes du tenseur métrique contravariant.

$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$: composantes du tenseur métrique covariant.

En coordonnées cartésiennes $g^{ij} = g_{ij} = \delta_i^j$: symbole de Kronecker.

En exprimant l'équation (3-12-1) sous forme matricielle en fonction de E (module d'Young) et ν (coefficient de Poisson) avec :

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \text{ nous obtenons :}$$

$$|\sigma| = |D| |\varepsilon| \quad 3-12-2$$

avec $|\sigma|$: vecteur contrainte

$|\varepsilon|$: vecteur déformation

$|D|$: matrice d'élasticité

3.1.3 Equations d'équilibre (Réf. 4)

Considérons la résultante des forces agissant sur un volume quelconque d'un corps.

Cette résultante est égale à la somme des forces agissant sur les éléments du volume envisagé, soit $\int F_{dv}$, F étant la force agissant par unité de volume.

D'autre part, les forces avec lesquelles réagissent les diverses parties de ce volume les unes sur les autres, s'annulent mutuellement (action et réaction). Ainsi la résultante cherchée peut-elle être considérée comme la somme des seules forces avec lesquelles le volume est sollicité par les

parties contiguës du corps ; donc comme la somme des forces agissant sur chaque élément de la surface du volume.

Donc chacune des 3 composantes $\int f_i dv$ de la résultante de toutes les contraintes internes peut-être transformée en intégrale prise sur la surface du volume considéré (Formule d'Ostrogradski).

Et puisque f_i est un vecteur, il doit être la divergence d'un tenseur du second ordre : le tenseur contrainte, donc f_i s'écrit :

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (\sigma_{ik} = t^{ik})$$

$$\text{A l'équilibre } f_i = 0 \text{ donc } \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Et dans le champ de pesanteur, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \quad 3-13-1$$

Dans le cas de matériau homogène et isotrope remplaçons le tenseur des contraintes par son expression (3-12-1) et remplaçant λ et μ par leur valeur :

$$\lambda = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\text{C'est à dire } \sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu} (e^{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_i^k) \text{ avec } \theta = e_1^1$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial e_1^1}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial e^{ik}}{\partial x_k}$$

et l'équation (3-13-1) s'écrit en remplaçant e^{ik} par sa valeur :

$$\frac{1}{2} (\partial_k u_i + \partial_i u_k) + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_1} + \rho g_i = 0 \quad 3-13-2$$

En notation vectorielle, en notant que les quantités $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$ sont les composantes de Δu et $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv \text{div } u$, l'équation précédente s'écrit :

$$\Delta u + \frac{1}{(1+\nu)} \text{grad div } u = - \rho g \frac{2(1+\nu)}{E} \quad 3-13-3$$

Expression qui se transforme en appliquant la formule :

$$\text{grad div } u = \Delta u + \text{rot rot } u$$

$$\text{grad div } u - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \text{rot rot } u = - \rho g \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \quad 3-13-4$$

Le cas le plus important est celui où la déformation est due à des forces appliquées à la surface du corps et non à des forces volumiques, nous avons alors :

$$(1-2\nu) \Delta u + \text{grad div } u = 0 \quad 3-13-5$$

$$\text{soit } 2(1-\nu) \text{grad div } u - (1-2\nu) \text{rot rot } u = 0 \quad 3-13-6$$

et en appliquant l'opérateur div à (3-13-5) il vient puisque,
div grad $\equiv \Delta$

$$\Delta \text{div } u = 0$$

et en appliquant l'opérateur de Laplace Δ à (3-13-5)

$$\Delta \Delta u = 0$$

Le vecteur déplacement u satisfait donc à l'équation biharmonique. Ces résultats subsistent dans un champ de pesanteur uniforme ; mais cela ne signifie pas que l'intégrale générale des équations d'équilibre, en l'absence de forces volumiques soit une fonction vectorielle biharmonique arbitraire le vecteur $u(x, y, z)$ devant en effet vérifier l'équation (3-15-5) équation aux dérivées partielles d'ordre inférieur.

3.1.4 Conditions de compatibilité (*)

La forme générale des conditions de compatibilité est :

$$\frac{\partial^2 e_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad 3-14-1$$

avec k indice différent de i et de j

avec $i \neq j$ on a des équations du type :

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) \quad 3-14-2$$

et avec $i = j$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad 3-14-3$$

3.2 - LES PRINCIPES VARIATIONNELS EN MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

3.2.1 - Principe variationnel général

Pour des raisons de simplicité d'écriture, nous ne considérons que l'état de chargement plan, l'extension au cas de structures à trois dimensions, étant immédiate.

Soit un champ de déformations $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$
 et un champ de contraintes $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$

En appliquant les théorèmes des forces ou des déplacements virtuels, en appelant :

$\bar{U}_i$: densité d'énergie de déformation

$\bar{U}_i^*$: densité d'énergie de déformation complémentaire

nous avons les relations énergétiques suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \epsilon_x} & \epsilon_x &= \frac{\partial \bar{U}_i^*}{\partial \sigma_x} \\ \sigma_y &= \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \epsilon_y} & \epsilon_y &= \frac{\partial \bar{U}_i^*}{\partial \sigma_y} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \tau_{xy}} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial \bar{U}_i^*}{\partial \tau_{xy}} \end{aligned}$$

Soient $\{\Phi\} = \{\Phi_x, \Phi_y\}$ les forces de surface
 $\{X\} = \{X_x, X_y\}$ les forces de masse

Les différentes valeurs limites imposées sont soulignées, par exemple :

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \quad \text{sur la frontière } \Gamma_u.$$

Fraeijs de Veubeke [12], [14], exprime le principe variationnel général sous la forme suivante :

$$\delta(U_i + U_e + D) = 0$$

où U_i = énergie de déformation totale

U_e = énergie potentielle des charges imposées, calculée à partir d'un champ de déplacement u, v compatible, donc satisfaisant les conditions d'intégralité et les conditions limites.

$$\text{soit} \quad U_c = - \int_V (\bar{X}_x u + \bar{X}_y v) dv - \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{\Phi}_x u + \bar{\Phi}_y v) ds$$

- D potentiel de dislocation dû à $\theta = (\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}, \phi'_x, \phi'_y)$ multiplicateurs de Lagrange, affectés aux contraintes exprimées en volume et sur le contour.

$$D = \int_V \left| \sigma'_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon_x \right) + \sigma'_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \epsilon_y \right) + \tau'_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{xy} \right) \right| dv$$

$$+ \int_{\Gamma_u} \left| \phi'_x (\bar{u} - u) + \phi'_y (\bar{v} - v) \right| ds$$

Dans l'expression générale $\delta(U_i + U_e + D) = 0$, le champ de déformation ϵ , le champ de déplacement u, v et les multiplicateurs de Lagrange θ peuvent varier indépendamment.

De ce principe général on peut déduire des principes variationnels plus simples.

3.2.2 - Principe de Reissner

Si l'on impose à priori aux multiplicateurs d'être les contraintes associées au champ ϵ , le principe général se réduit au principe de Reissner [12], [13], [14].

$$\delta(R + P_r) = 0$$

avec $R = \int_V \left| \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \bar{U}_i^* \right| dv$

et $P_r = \int_{\Gamma_u} \left| \phi_x (\bar{u} - u) + \phi_y (\bar{v} - v) \right| dx + U_e$

Ce principe ne contient donc que les deux champs de contraintes σ et de déplacements u, v indépendants.

Si l'on impose une conditions supplémentaire aux solutions, ce principe se réduit à des principes ne faisant plus intervenir qu'un seul champ.

3.2.3 - Principe de l'énergie potentielle minimum.

Si l'on restreint les solutions à celles satisfaisant les conditions de compatibilité déformations-déplacements, soient :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

et $u = \bar{u}$
 $v = \bar{v}$ sur la frontière Γ_u

Le principe de Reissner se réduit alors au principe de variation des déplacements ou de l'énergie potentielle minimum (*).

$$\delta(U_i + U_e) = 0$$

Ce principe s'énonce de la manière suivante :

"Tout champ de déplacements compatibles, satisfaisant les conditions limites et les conditions d'équilibre, conduit à une valeur stationnaire de l'énergie potentielle totale U ".

Cette valeur stationnaire est toujours un minimum, et toute structure en équilibre, soumise à un système de forces extérieures et à une distribution de température représente un système stable.

3.2.4 Principe de l'énergie complémentaire minimum.

Par contre si on suppose que les relations contraintes-déformations sont satisfaites, le principe de Reissner se réduit au principe de l'énergie complémentaire minimum qui s'énonce ainsi : (*)

De tous les champs de contraintes qui satisfont les équations d'équilibre et les conditions extérieures de contraintes, le champ réel est celui qui rend stationnaire (et minimum) l'énergie complémentaire U_i^* .

Dans la méthode des Eléments Finis ("Méthode des Contraintes") c'est le théorème réciproque qui est appliqué et il s'énonce :

Soit U_i^* l'énergie complémentaire. Si le champ de contraintes σ est tel que $\delta U_i^* = 0$ pour tout accroissement arbitraire $\delta\sigma$ admissible, respecte aussi les conditions de compatibilité (qui sont les équations d'Euler de la relation variationnelle $\delta U_i^* = 0$).

(*) Réf. [7] , [12] , [13] , [14] , [15] , [16] , [17] , [18] , [19]

IV - METHODE DES ELEMENTS FINIS - Etude Théorique

4.1 - INTRODUCTION - HISTORIQUE -

Une étape importante dans la conception d'une structure mécanique est la détermination des contraintes et des déformations.

Les méthodes classiques de résistance de matériaux sont surtout adaptées au calcul manuel de ces inconnues et sont très souvent insuffisantes dans des cas complexes. Dans ces cas plus complexes, il est nécessaire de faire une analyse plus poussée du problème en appliquant la théorie de l'élasticité.

La formulation des équations décrivant le comportement d'une structure dans le domaine élastique, tient compte :

- du comportement du matériau, c'est-à-dire du module d'Young et du coefficient de Poisson.
- de l'équilibre des efforts intérieurs.
- des conditions de continuité dans la matière : équations de compatibilité.
- des conditions aux limites.

Il en résulte des équations mathématiquement exactes, mais qui sont des équations aux dérivées partielles dont la résolution analytique est rarement possible.

L'apparition des ordinateurs et les progrès réalisés dans ce domaine ont permis le développement des méthodes numériques en mécanique des milieux continus. Ces méthodes tiennent compte du fait que l'ordinateur ne peut exécuter que les quatre opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication et division).

Parmi ces méthodes, nous pouvons citer :

1 - Procédé de réduction ou méthode des matrices de transmission, dû à FALK, applicable principalement aux poutres et à l'analyse des ossatures [20]. La poutre étant divisée en différents éléments : travées, tronçons et leurs frontières, le procédé de réduction, consiste à exprimer les conditions d'équilibre des efforts et de comptabilité des déformations le long de ces divers éléments et à leurs frontières.

2 - Les méthodes des forces et des déformations. Ce sont des méthodes plus générales que le procédé de réduction, basées sur le théorème des travaux virtuels [20], [21], [26].

3 - La méthode des différences finies. Cette méthode consiste à remplacer les différentielles des équations aux dérivées partielles par des différences finies de même ordre [8].

4 - La méthode des Eléments Finis. Il s'agit d'une méthode variationnelle approchée, dont les bases théoriques sont dues au Professeur Argyris (Université de Stuttgart) qui les a exposées en 1955 dans son ouvrage "Energy Theorems and Structural Analysis", [22].

Très vite elle s'est développée aux Etats-Unis et en Angleterre sous l'impulsion de Turner (USA), Clough (USA), Martin (G.B.) et Topp avec leur ouvrage "Stiffness and deflection analysis of complex structures" (1956) [23] et surtout du Professeur Zienkiewicz (Université de Wales - G.B.) (1965-1966) qui lui a donné sa forme actuelle. [24]

En France, elle n'est apparue qu'aux alentours de 1965 et n'est encore que très peu utilisée.

L'idée de base est de considérer une structure conventionnelle comme l'assemblage d'éléments de structure simples, de dimensions finies reliés par des noeuds. Le modèle ainsi formé a les mêmes dimensions que la structure à étudier et on impose les mêmes conditions aux limites.

Si la relation fondamentale liant les forces aux déplacements est connue pour chaque élément de structure, il est possible en utilisant diverses techniques d'analyse des structures, d'en déduire les propriétés et d'étudier le comportement de la structure assemblée.

Dans un milieu continu élastique, le nombre de liaisons inter-éléments est infini, ce qui constitue la principale difficulté d'analyse.

Turner, Clough, Martin et Topp en introduisant le concept des éléments Finis [23], tournent la difficulté en supposant que le milieu réel peut-être divisé en éléments, reliés entre-eux par un nombre fini de points. Des forces fictives représentatives des forces extérieures réellement appliquées sur les éléments frontières, sont appliquées aux points de liaison entre les éléments.

L'approximation est donc de nature physique puisque le modèle ne représente pas la structure réelle. L'analyse du modèle conduit à un système d'équations linéaires mathématiquement exactes, donc la méthode des Eléments Finis n'est pas une méthode de calcul approché.

La deuxième difficulté réside dans l'établissement de la relation fondamentale : Force-Déplacement, c'est-à-dire sur l'hypothèse à faire sur le champ des fonctions inconnues.

La loi d'assemblage des différents éléments se déduit du principe variationnel.

Les domaines d'applications de cette méthode sont nombreux (*) puisqu'il est possible, d'aborder les problèmes :

- plans
- tri-dimensionnels
- de révolution
- de plaques et coques.

l'étude des milieux homogènes ou hétérogènes, isotropes ou anisotropes. et des problèmes plus complexes de plasticité, de dynamique, d'écoulement, de rupture, etc.

Aussi cette méthode s'applique-t-elle avec succès en aéronautique, en mécanique des fluides, en mécanique des roches, des sols....

(*) Réf. |27|, |28| , |31| , |32| , |33|

4.2 - NOTATIONS -

Conventions adoptées : $|A|$: matrice rectangulaire de dimensions (n,p)

$\{B\}$: vecteur.

$\{f\}$: vecteur déplacement en un point.

$\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}$: composantes de $\{f\}$ suivant les 3 axes Ox, Oy, Oz.

$\{\delta_i\}$: vecteur déplacement du noeud i de composantes u_i, v_i, w_i suivant les 3 axes.

$\{\delta\}_e$: vecteur des déplacements nodaux d'un élément (e) de composantes $\{\delta_i\}, \{\delta_j\}, \dots, \{\delta_m\}$.

$\{\Delta\}$: vecteur des déplacements nodaux de toute la structure.

$\{F\}_e$: vecteur des forces nodales équivalentes agissant aux noeuds de l'élément (e).

$\{R\}$: matrice des forces extérieures appliquées à la structure.

$|k_{rs}|$: sous-matrice raideur élémentaire se rapportant aux noeuds r et s d'un élément (e).

$|k|_e$: matrice raideur de l'élément (e).

$|K_{rs}|$: sous-matrice raideur élémentaire se rapportant aux noeuds r et s de la structure complète.

$|K|$: matrice raideur globale d'une structure.

$|D|$: matrice élasticité.

$\{\epsilon\}_e$: vecteur déformation d'un élément (e).

$\{\epsilon_o\}$: vecteur des déformations initiales.

$|B|$: matrice transformation déplacements - déformations.

$|S|$: matrice transformation déplacements - contraintes.

$\{\sigma\}_e$: vecteur contrainte d'un élément (e).

$\{F\}_p^e$: vecteur des forces de masse agissant sur l'élément (e).

$\{F\}_{\epsilon_o}^e$: vecteur des forces dues aux déformations initiales.

4.3 - HYPOTHESES - MODE OPERATOIRE -

4.3.1 Idéalisation de la structure

La méthode des éléments finis repose donc sur la première hypothèse de base suivante :

La structure à analyser peut-être divisée en un certain nombre d'éléments de dimensions finies, reliés entre-eux en un nombre fini de points appelés "points nodaux" ou noeuds de la structure.

La première phase dans l'analyse de la structure sera donc la phase "d'idéalisation" ou de "discrétisation". Elle consistera à découper la structure par des lignes ou surfaces imaginaires de manière à former des "éléments finis". Les noeuds de la structure seront situés aux intersections des lignes en surfaces ainsi définies.

Les inconnues du système seront les déplacements de ces différents noeuds.

4.3.2 Choix de la fonction déplacement (*)

Une fonction déplacement sera choisie de manière à déterminer le déplacement d'un point intérieur d'un élément quelconque en fonction seulement de déplacements nodaux de l'élément considéré.

L'état de contrainte sur l'élément entier, y compris sa frontière, sera défini en fonction de l'ensemble des déformations résultant :

- des déplacements
- des déformations initiales (température,...)
- des propriétés particulières du matériau constituant la structure.

Deux types courants de méthodes peuvent être utilisés pour caractériser déplacements et contraintes de la structure.

4.3.2.1 Méthode dite "des contraintes"

On fait l'hypothèse que le champ de contraintes s'écrit sous une forme paramétrique donnée respectant les conditions d'équilibre à l'intérieur des éléments et la continuité des contraintes entre les éléments. (application du principe de l'énergie complémentaire minimum).

Mais dans ces conditions le champ des déplacements qui en dérive ne satisfait pas les conditions de compatibilité.

(*) Réf. [2], [16], [17], [24], [25], [29], [30]

4.32.2 Méthode dite "des déplacements"

On fait l'hypothèse que le champ des déplacements s'écrit sous une forme paramétrique donnée qui assure la compatibilité des déplacements à l'intérieur des éléments et entre les éléments. Le champ des déplacements doit être tel qu'il ne puisse y avoir ni chevauchement, ni vide entre deux éléments. (application du principe de l'énergie potentielle minimum).

Dans ces conditions, la distribution de contraintes qui en résulte ne satisfait pas les conditions d'équilibre ; en particulier il y a discontinuité du champ de contraintes entre deux éléments.

Dans notre étude, nous adopterons cette méthode car, d'une part, c'est la méthode la plus utilisée et, d'autre part, nous montrerons qu'elle conduit à des résultats très acceptables lorsque certaines précautions sont prises.

Nous donnons ci-dessous la forme générale de la fonction déplacement de cette méthode.

Soit une structure S décomposée en un réseau d'éléments à n sommets.

Le champ des déplacements s'exprime sous forme paramétrique en fonction des déplacements nodaux seulement

l'équation paramétrique s'écrit :

$$f = f^i \alpha_i \quad (4-322-1)$$

Cette fonction déplacement doit vérifier le principe de l'énergie potentielle minimum, donc les α_i doivent être solutions du système d'équations :

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (4-322-2)$$

Cette fonction déplacement s'exprimant en fonction des déplacements nodaux peut s'écrire en fonction de chacune des composantes soit, par exemple, pour une structure plane :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u = u^i \alpha_i \\ v = v^i \alpha_i \end{Bmatrix} (x,y) \quad (4-322-3)$$

avec u^i et v^i composantes du déplacement du noeud i de coordonnées (x_i, y_i)

les fonctions $\alpha_i(x,y)$ doivent vérifier la propriété suivante :

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \delta_i^j \quad (4-322-4)$$

Si i et j sont des indices correspondant à 2 sommets et δ_i^j le symbole de KRONECKER qui prend les valeurs :

$$\delta_i^j = 1 \quad \text{si } i = j$$

$$\delta_i^j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

De la même façon pour une structure à 3 dimensions, en posant :

$$\alpha_i(x,y,z) = \delta_i^j, \{f\} \text{ s'écrit :}$$

$$\{f\} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{cases} u = u^i \alpha_i(x,y,z) \\ v = v^i \alpha_i(x,y,z) \\ w = w^i \alpha_i(x,y,z) \end{cases} \quad (4-322-5)$$

$\{f\}$ peut également s'écrire sous forme matricielle en fonction du vecteur $\{\delta\}_e$ et d'une matrice $|N|$, telle que $|N| = |N_i, N_j, \dots, N_m|$, les sous matrices $|N_i|$, $|N_j|$, ... $|N_m|$ étant des fonctions des coordonnées (x,y,z) d'un point intérieur de l'élément (e) et satisfaisant les conditions :

$$|N_i| = |I| \quad \text{si} \quad \begin{cases} x = x_i \\ y = y_i \\ z = z_i \end{cases}$$

$$\text{et } |N_i| = |0| \quad \text{si} \quad \begin{cases} x = x_j \\ y = y_j \\ z = z_j \end{cases} \quad i \neq j$$

Dans ces conditions la relation entre $\{f\}$ et $\{\delta\}_e$ est :

$$\{f\} = |N_i, N_j, \dots, N_m| \{\delta\}_e \quad (4-322-6)$$

En outre $\{f\}$ doit-être continu sur l'élément (e), donc chacune de ses composantes devra être continue sur l'élément (e).

4.3.3 Equation d'équilibre - Assemblage de la structure (Réf. |24|)

L'équilibre de chaque élément étant écrit séparément, conformément à la relation fondamentale que nous écrirons dans le paragraphe suivant :

$$\{F\}_e = |k|_e \{\delta\}_e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\epsilon_0}^e \quad (4-33-1)$$

l'équilibre de la structure complète, s'écrit en regroupant toutes ces équations particulières à chaque élément.

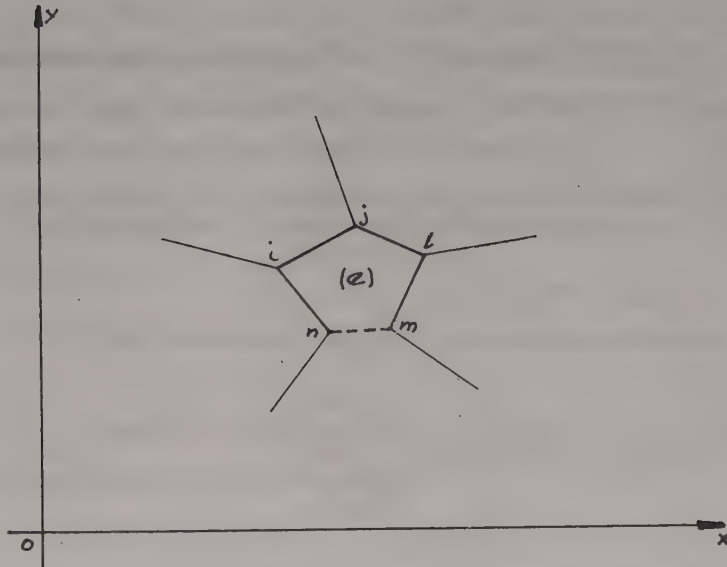
4.4 - METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AUX PROBLEMES PLANS -

4.4.1 Mise en équation des caractéristiques d'un élément fini

4.4.1.1 Fonction déplacement

Nous avons mentionné dans le chapitre (4.3) que pour conduire notre étude nous adopterions la méthode dite "des déplacements".

Considérons un élément (e) particulier d'une structure plane.



Cet élément est caractérisé par ses noeuds :

$i, j, l, m, \dots, n$

et par les lignes frontières :

$ij, jl, \dots, ni$

Le déplacement de chaque point intérieur de l'élément est défini par le vecteur déplacement $f(x,y)$ conformément au chapitre (3-2) par :

$$\{f\} = [N] \{\delta\}_e = [N_i, N_j, \dots, N_n] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (4-411-1)$$

Explicitons les différents éléments de cette équation dans le cas d'un triangle de noeuds i, j, m pour un état de déformations planes.

$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$ représente le déplacement horizontal et vertical d'un point intérieur du triangle.

$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$ composantes du déplacement du noeud i.

$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}$ vecteur des déplacements nodaux.

L'équation (3 - 8) s'écrit alors :

$$\{f\} = [N_i, N_j, N_m] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (4-411-2)$$

$$= [N_i] \{\delta_i\} + [N_j] \{\delta_j\} + [N_m] \{\delta_m\}$$

$$= [N_i] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + [N_j] \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} + [N_m] \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (4-411-3)$$

Et, compte-tenu du paragraphe 3.2.2.2, les sous-matrices

$[N_i]$, $[N_j]$, $[N_m]$ s'écrivent :

$$[N_i] = \alpha_i(x,y) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_i(x,y) [I]$$

$$[N_j] = \alpha_j(x,y) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_j(x,y) [I] \quad (4-411-4)$$

$$[N_m] = \alpha_m(x,y) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_m(x,y) [I]$$

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \delta_i^j$$

4.41.2 Déformations

Lorsque les déplacements sont connus pour tous les points intérieurs d'un élément (e), on peut déterminer les déformations en tous points par une relation de la forme :

$$\{\varepsilon\}_e = [B] \{\delta\}_e \quad (4-412-1)$$

$\{\varepsilon\}_e$: étant le vecteur déformation en un point intérieur de l'élément (e).

Dans le cas particulier de déformations planes, $\{\epsilon\}_e$ est défini par 3 composantes :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

La matrice $[N]$ étant déterminée, la matrice $[B]$ peut-être facilement calculée.

4.41.3 Contraintes

En général la structure est soumise à une déformation initiale due à la température par exemple, déformation qui sera notée $\{\epsilon_0\}$.

La relation fondamentale entre contraintes et déformations s'écrit, comme nous l'avons vu au chapitre 3.1.2 :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \quad (4-413-1)$$

$\{\sigma\}$ étant le vecteur contrainte, défini par ses composantes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{dans le cas de contraintes planes}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{dans le cas de déformations planes}$$

$[D]$: matrice élasticité.

4.41.4 Forces nodales équivalentes

$$\{F\}_e = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ \vdots \\ F_e \end{bmatrix}$$

Ces vecteurs définissent les forces aux noeuds, statiquement équivalentes aux forces extérieures et charges réparties sur l'élément.

Dans le cas particulier de chargement plan, chaque force

$\{F_i\}$ a 2 composantes.

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

De même les forces de masse $\{p\}$:

$$\{p\}_e = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_e$$

Ces forces de masse sont définies comme agissant sur un volume unitaire à l'intérieur de l'élément suivant des directions correspondant à celles des déplacements $\{f\}$ en ce point.

Pour réaliser un chargement statique équivalent, la méthode la plus simple est d'imposer arbitrairement des déplacements virtuels aux noeuds et d'écrire l'égalité des travaux internes et externes des différentes forces et contraintes subissant ces déplacements.

Soit un déplacement virtuel $\{\delta^*\}_e$ de l'élément e .

D'après les équations 4-411-1 et 4-412-1, il résulte :

$$\begin{aligned} \{f^*\} &= |N| \{\delta^*\}_e \\ \text{et } \{\varepsilon^*\} &= |B| \{\delta^*\}_e \end{aligned} \quad (4-414-1)$$

Le travail des forces nodales est égal à la somme des produits des composantes des forces par les composantes des déplacements correspondants, soit :

$$(\{\delta^*\}_e)^T \cdot \{F\}_e \quad (4-414-2)$$

De même le travail interne dû aux contraintes et aux forces de masse s'écrit :

$$\{\varepsilon^*\}_e^T \cdot \{\sigma\}_e - \{f^*\}_e^T \{p\}_e \quad (4-414-3)$$

travail par unité de volume.

$$\text{Or } \{\varepsilon\}_e = |B| \{\delta\}_e$$

$$\{f\}_e = |N| \{\delta\}_e$$

D'où l'équation (16) s'écrit :

$$\left| |B| \{\delta^*\}_e \right|^T \{\sigma\}_e - \left| |N| \{\delta^*\}_e \right|^T \{p\}_e \quad (4-414-4)$$

$$\{\delta^*\}_e^T |B|^T \{\sigma\}_e - \{\delta^*\}_e^T |N|^T \{p\}_e$$

$$\{\delta^*\}_e^T \left| |B|^T \{\sigma\}_e - |N|^T \{p\}_e \right| \quad (4-414-5)$$

En écrivant l'égalité des travaux interne et externe, il vient :

$$\{\delta^*\}_e^T \{F\}_e = \{\delta^*\}_e^T \int_{\text{volume}} (|B|^T \{\sigma\}_e - |N|^T \{p\}_e) d(\text{vol.})$$

$$\{\delta^*\}_e^T \{F\}_e = \{\delta^*\}_e^T \left(\int_V |B|^T \{\sigma\}_e d(\text{vol.}) - \int_V |N|^T \{p\}_e d(\text{vol.}) \right) \quad (4-414-1)$$

ou encore compte tenu des équations (4-411-4) et (4-413-1)

$$\{F\}_e = \left| \int_V |B|^T |D| |B| d(\text{vol.}) \right| \{\delta\}_e - \int_V |N|^T \{p\}_e d(\text{vol.}) \quad (4-414-7)$$

C'est l'équation fondamentale pour tout élément.

Dans ces conditions la matrice raideur de l'élément (e) s'écrit :

$$|k|_e = \int_V |B|^T |D| |B| d(\text{vol.}) \quad (4-414-8)$$

Les forces nodales dues aux forces de masse sont :

$$\{F\}_p^e = - \int_V |N|^T \{p\} d(\text{vol.}) \quad (4-414-9)$$

Expression valable également dans le cas d'une charge uniformément répartie. Mais dans ce cas on pourra considérer cette charge comme concentrée et agissant sur les noeuds limites.

Lorsque les forces concentrées extérieures existent aux noeuds, la matrice :

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}$$

doit être ajoutée à la considération d'équilibre des noeuds.

4.4.2 Élément triangulaire à 6 degré de liberté

Nous étudierons dans cette partie la mise en équation de la relation forces - déplacements pour l'élément de base triangulaire à 6 degrés de liberté (3 noeuds à 2 degrés de liberté). La fonction déplacement choisie étant celle définie précédemment (Méthode des déplacements).

Les déplacements nodaux s'expriment par leurs deux composantes u et v horizontale et verticale.

De même les contraintes s'expriment par 3 composantes :

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$$

4.42.1 Caractéristiques de l'élément

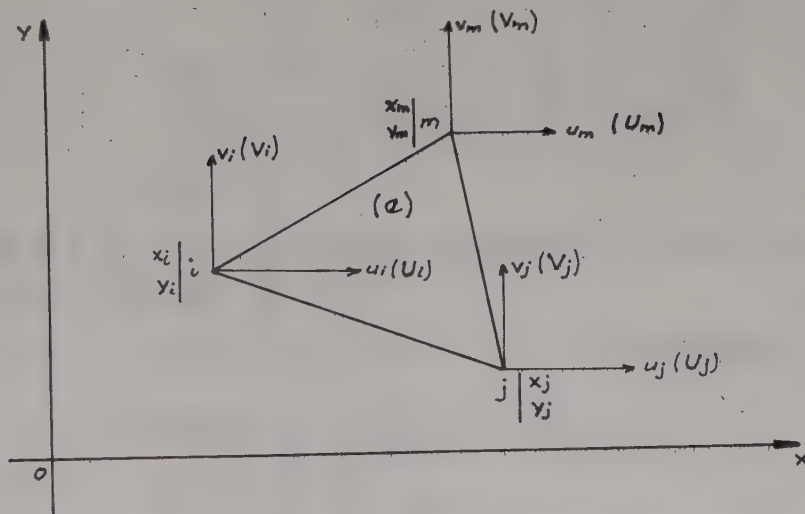
4.421.1 Fonction déplacement

Considérons un élément triangulaire (e) de noeuds i, j, m. Noeuds numérotés dans le sens trigonométrique.

Le déplacement de l'élément (e) est caractérisé par :

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

Soient (x_i, y_i) ; (x_j, y_j) ; (x_m, y_m) les coordonnées des noeuds i j m dans un repère orthonormé xoy.



Les déplacements d'un point intérieur de (e) doivent s'exprimer en fonction des 6 quantités : $u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m$.

Compte-tenu des hypothèses précédemment posées, la fonction déplacement adoptée est de la forme :

$$\{f\}_e = \begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \quad (4-4211-1)$$

(x, y) étant les coordonnées d'un point intérieur de (e).

Les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ sont déterminées en fonction des coordonnées et des déplacements nodaux.

Soit :

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{cases}$$

et

(4-4211-2)

$$\begin{cases} v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ v_j = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ v_m = \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m \end{cases}$$

ou, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

et

(4-4211-3)

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Rappelons que $\det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} = 2 \Delta$, Δ étant l'aire

de l'élément triangulaire.

Donc nous obtenons en notant :

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix}$$

Calcul de A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \cdot \text{Transposée (Adj A)}$$

$$\text{Adj A} = \begin{vmatrix} x_j y_m - x_m y_j & y_j - y_m & x_m - x_j \\ x_m y_i - x_i y_m & y_m - y_i & x_i - x_m \\ x_i y_j - x_j y_i & y_i - y_j & x_j - x_i \end{vmatrix}$$

D'où :

$$A^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} x_j y_m - x_m y_j & x_m y_i - x_i y_m & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_m & y_m - y_i & y_i - y_j \\ x_m - x_j & x_i - x_m & x_j - x_i \end{vmatrix}$$

Ou, en adoptant les notations suivantes :

$$\begin{vmatrix} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i = y_j - y_m \\ c_i = x_m - x_j \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_j = x_m y_i - x_i y_m \\ b_j = y_m - y_i \\ c_j = x_i - x_m \end{vmatrix} \quad (4-4211-4)$$

$$\begin{vmatrix} a_m = x_i y_j - x_j y_i \\ b_m = y_i - y_j \\ c_m = x_j - x_i \end{vmatrix}$$

(Remarquons que les a_j, b_j, c_j ; a_m, b_m, c_m , peuvent être obtenus par permutation circulaire à partir des a_i, b_i, c_i).

Nous avons donc :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{vmatrix}$$

(4-4211-5)

et

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{vmatrix}$$

Et en reportant ces valeurs de α dans les fonctions

u et v

nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} u = \frac{1}{2\Delta} \{ (a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m \} \\ v = \frac{1}{2\Delta} \{ (a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m \} \end{vmatrix}$$

(4-4211-6)

Et sous forme matricielle :

$$\{f\}_e = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |I| N'_i & |I| N'_j & |I| N'_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } N'_i = (a_i + b_i x + c_i y) \frac{1}{2\Delta} = \alpha_i(x,y)$$

$$N'_j = (a_j + b_j x + c_j y) \frac{1}{2\Delta} = \alpha_j(x,y)$$

$$N'_m = (a_m + b_m x + c_m y) \frac{1}{2\Delta} = \alpha_m(x,y)$$

$\alpha_i(x,y)$, $\alpha_j(x,y)$, $\alpha_m(x,y)$ fonctions définies par les équations (4-411-4) et $|I|$ matrice unité de dimensions (2,2).

Cette fonction déplacement satisfait donc aux conditions imposées : continuité des déplacements sur l'élément et entre éléments.

En effet, les déplacements varient linéairement sur chaque côté du triangle, donc avec des déplacements identiques aux noeuds communs à 2 triangles, les déplacements sur le côté commun seront identiques.

4.421.2 Déformations

La déformation totale, en un point intérieur d'un élément, sera définie par ses 3 composantes :

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$$

Et, sous forme matricielle :

$$\{\epsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (4-4212-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} \{b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} \{c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m\} \quad (4-4212-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} \{b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} \{c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m\}$$

Donc, en exprimant sous forme matricielle la relation entre $\{\varepsilon\}_e$ et $\{\delta\}_e$, il vient :

$$\{\varepsilon\}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\}_e = [B] \{\delta\}_e \quad (4-4212-3)$$

Avec $[B]$:

$$[B] = \frac{1}{2 \Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (4-4212-4)$$

Cette matrice $[B]$ n'est fonction que des coordonnées des noeuds du triangle (e), donc indépendante de la position d'un point quelconque; ce qui correspond aux hypothèses choisies : constance de la déformation sur un élément ; donc des contraintes.

4.421.3 Matrice élasticité

C'est la matrice $[D]$ reliant les contraintes aux déformations :

$$\{\sigma\}_e = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4-4213-1)$$

Dans le cas présent de contraintes planes et en supposant le matériau isotrope, cette matrice $[D]$ s'explique en écrivant les relations entre contraintes et déformations.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (4-4213-2)$$

E étant le module d'élasticité.

ν : coefficient de Poisson.

Donc :

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix} \{\sigma\}$$

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{E} |D|^{-1} \{\sigma\}$$

Donc :

$$|D| = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \quad (4-4213-3)$$

Dans le cas d'un matériau anisotrope, nous aurions pour les problèmes bi-dimensionnels :

$$|D| = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ \text{sym.} & & d_{33} \end{vmatrix}$$

4.421.4 Matrice raideur

Dans le chapitre (4.41.4), nous avons établi la matrice raideur pour un élément quelconque, elle est de la forme :

$$|k| = \int_V |B|^T |D| |B| dx dy dz$$

Dans le cas présent, les matrices $|B|$, et $|D|$, sont indépendantes de la position d'un point intérieur à l'élément.

Donc :

$$|k|_e = |B|^T \cdot |D| |B| \int_V dx dy dz$$

D'autre part, l'élément étant plan, il est d'épaisseur constante : t

Donc la matrice raideur pour l'élément triangulaire plan s'écrit :

$$|k|_e = |B|^T |D| |B| \times t \times \Delta \quad (4-4214-1)$$

En écrivant $|B|$, sous forme de sous matrices :

$$|B| = |B_i, B_j, B_m|$$

avec :

$$|B_i| = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{vmatrix}$$

$$|B_j| = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{vmatrix}$$

$$|B_m| = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b_m & 0 \\ 0 & c_m \\ c_m & b_m \end{vmatrix}$$

$|k|_e$ se met sous la forme :

$$|k|_e = \begin{vmatrix} B_i^T \\ B_j^T \\ B_m^T \end{vmatrix} |D| |B_i, B_j, B_m| \times t \times \Delta \quad (4-4214-2)$$

$$|k|_e = \begin{vmatrix} B_i^T \\ B_j^T \\ B_m^T \end{vmatrix} |D B_i, D B_j, D B_m| \times t \times \Delta$$

$$|k|_e = \begin{vmatrix} B_i^T D B_i & B_i^T D B_j & B_i^T D B_m \\ B_j^T D B_i & B_j^T D B_j & B_j^T D B_m \\ B_m^T D B_i & B_m^T D B_j & B_m^T D B_m \end{vmatrix} \times t \times \Delta$$

Soit :

$$|k|_e = \begin{vmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{vmatrix} \times t \times \Delta \quad (4-4214-3)$$

Avec chaque $|k_{rs}| = |B_r|^T |D| |B_s| \times t \times \Delta$

$|k_{rs}|$ étant 1 matrice élémentaire de dimensions

(2,2).

On retrouve bien la symétrie de la matrice raideur

$|k|_e$, en effet :

$$|k_{rs}| = |k_{sr}|^T$$

$$\begin{aligned} \text{car : } |k_{rs}| &= |B_r|^T |D| |B_s| \\ |k_{sr}|^T &= (|B_s|^T |D| |B_r|)^T \\ &= |B_r|^T |D| |B_s| \end{aligned}$$

Donc, en résumé, la matrice raideur de l'élément étant calculée comme précédemment, les forces aux noeuds étant connues, nous pourrons calculer les déplacements nodaux en appliquant la relation :

$$\{F_e\} = |k|_e \{\delta_e\}$$

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} \quad \{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta\}_e = |k|_e^{-1} \{F\}_e$$

Ayant calculé ces déplacements, les déformations sont immédiatement déduites par la relation :

$$\{\epsilon\}_e = |B| \{\delta\}_e$$

et les contraintes :

$$\{\sigma\}_e = |D| \{\epsilon\}_e$$

ou, en fonction des déplacements, cette relation s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_e &= |D| |B| \{\delta\}_e \\ &= |S|_e \{\delta\}_e \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |S|_e = |D| |B| \quad (4-4214-3)$$

4.4.3 Autres types d'éléments caractéristiques (*)

4.43.1 *Elément rectangulaire à 8 degrés de liberté*

Pour l'élément triangulaire chaque composante u et v du déplacement d'un point intérieur s'exprimait en fonction des 3 valeurs des composantes des déplacements nodaux. D'où le calcul de 3 constantes pour chaque composante du déplacement.

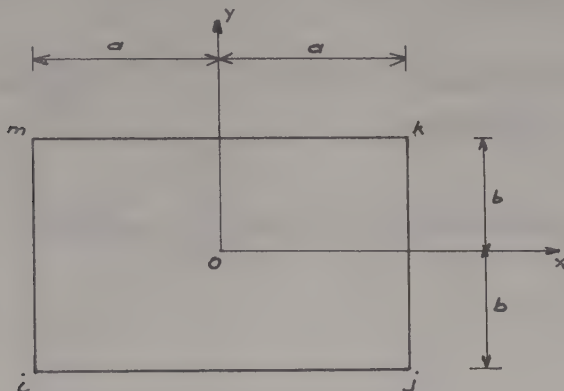
Dans le cas de l'élément rectangulaire pour exprimer le déplacement en fonction des déplacements nodaux, il est nécessaire d'introduire

(*) Réf. |2| , |16| , |24| , |35|

une quatrième constante dans l'expression polynomiale de chaque composante du déplacement.

Evidemment cette constante ne doit pas être arbitraire, la fonction déplacement devant être "conforme" c'est-à-dire assurer la compatibilité et la continuité des déplacements.

Considérons l'élément rectangulaire i j k m suivant :



Pour que la continuité des déplacements entre deux éléments adjacents soit assurée, la variation de chaque composante du déplacement le long des frontières des éléments doit être linéaire. La compatibilité des déplacements aux noeuds étant automatiquement assurée.

L'expression polynomiale sera donc limitée aux termes donnant une variation linéaire du déplacement sur des lignes à x ou y constant.

D'où la forme de la fonction déplacement.

$$\{ f \} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{Bmatrix} \quad (4-431-1)$$

Les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7, \alpha_8$ étant calculée en donnant les valeurs des coordonnées de chaque noeud à x et y

On obtient :

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 - a \alpha_2 - b \alpha_3 + ab \alpha_4 \\ v_i = \alpha_5 - a \alpha_6 - b \alpha_7 + ab \alpha_8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_j = \alpha_1 + a \alpha_2 - b \alpha_3 - ab \alpha_4 \\ v_j = \alpha_5 + a \alpha_6 - b \alpha_7 - ab \alpha_8 \end{cases}$$

etc ..

En résolvant ce système de 8 équations, on tire les valeurs de

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7, \alpha_8$$

et les expressions de u et v .

$$u = \frac{1}{4ab} \left\{ (a-x)(b-y) u_i + (a+x)(b-y) u_j + (a+x)(b+y) u_k + (a-x)(b+y) u_m \right\}$$

$$v = \text{expression identique avec } v_i, v_j, v_k, v_m$$

2a et 2b étant les dimensions de l'élément, les coordonnées étant repérées par rapport au centre de l'élément.

On peut obtenir une expression plus simple en posant :

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}$$

$$u = \frac{1}{4} \{ (1-x')(1-y') u_i + (1+x')(1-y') u_j + (1+x')(1+y') u_k + (1-x')(1+y') u_m \}$$

$$v = \frac{1}{4} \{ (1-x')(1-y') v_i + (1+x')(1-y') v_j + (1+x')(1+y') v_k + (1-x')(1+y') v_m \}$$

Sous forme matricielle ces expressions s'écrivent :

$$\{f\}_e = \begin{vmatrix} |I| & N'_i & |I| & N'_j & |I| & N'_k & |I| & N'_m \end{vmatrix} \{ \delta \}_e$$

avec $|I|$ matrice unité (2 x 2)

$$N'_i = \frac{1}{4ab} (a-x)(b-y)$$

$$N'_j = \frac{1}{4ab} (a+x)(b-y)$$

$$N'_k = \frac{1}{4ab} (a+x)(b+y)$$

$$N'_m = \frac{1}{4ab} (a-x)(b+y)$$

La fonction déplacement étant déterminée, la matrice raideur $[k]_e$ de l'élément pourra être calculée suivant la relation (21)

$$[k]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dv.$$

De même la matrice contrainte

$$[s]_e = \int_V [D] [B] dv.$$

4.43.2 Elément triangulaire à 6 noeuds - 12 degrés de liberté

Dans ce cas chaque composante du déplacement s'exprime en fonction de 6 constantes. La forme polynomiale conforme étant :

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ v = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2 \end{cases}$$



Dans ces conditions la variation de u et v sur les lignes frontières n'est plus linéaire, mais parabolique, l'équation de la parabole étant de forme :

$$u(s) = a + bs + cs^2$$

Pour assurer la continuité des déplacements entre deux éléments adjacents l'équation de cette parabole sera déterminée en ne considérant que les valeurs des coordonnées et des déplacements aux noeuds 1 - 2 - 3

Les constantes $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{12}$ sont déterminées en résolvant :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{etc} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

Soit $\{\delta\}_e = [C] \{\alpha\}$

Nous avons donc :

$$\begin{Bmatrix} f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = |P| \{ \alpha \}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \{f\} &= |P| |C^{-1}| \{\delta\}_e. \\ &= |N| \{\delta\}_e. \end{aligned}$$

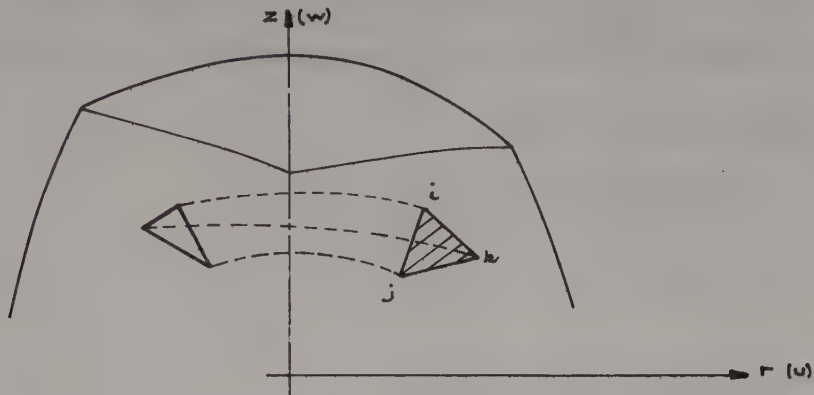
De même pour les déformations :

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= |Q| \{\alpha\} \\ &= |Q| |C^{-1}| \{\delta\}_e \\ &= |B| \{\delta\}_e. \end{aligned}$$

4.5 - METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AUX PROBLEMES DE REVOLUTION -

4.5.1 - Introduction .

Les structures de révolution sont d'un intérêt pratique considérable. Le problème mathématique présentant une grande similitude avec les structures bi-dimensionnelles, nous nous proposons d'établir les caractéristiques d'un élément triangulaire d'une structure de révolution.



L'élément triangulaire sera considéré dans un système de coordonnées semi-polaires (θ, r, z) . L'élément aura une épaisseur unité.

4.5.2 - Fonction déplacement .

Comme pour l'élément triangulaire plan, la fonction déplacement sera de la forme :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{Bmatrix} \quad (4-52-1)$$

Les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_5$ étant déterminées en considérant les valeurs nodales des déplacements et des coordonnées :

$$\begin{cases} u_i = \alpha_0 + \alpha_1 r_i + \alpha_2 z_i \\ w_i = \alpha_3 + \alpha_4 r_i + \alpha_5 z_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_j = \alpha_0 + \alpha_1 r_j + \alpha_2 z_j \\ w_j = \alpha_3 + \alpha_4 r_j + \alpha_5 z_j \end{cases} \quad (4-52-2)$$

$$\begin{cases} u_k = \alpha_0 + \alpha_1 r_k + \alpha_2 z_k \\ w_k = \alpha_3 + \alpha_4 r_k + \alpha_5 z_k \end{cases}$$

ou sous forme matricielle en posant :

$$\begin{Bmatrix} \delta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix}$$

Nous obtenons comme pour l'élément triangulaire plan :

$$\{f\}_e = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} |I| N'_i & |I| N'_j & |I| N'_k \end{bmatrix} \{\delta\}_e \quad (4-52-3)$$

avec $|I|$ matrice unité (2,2)

$$N'_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i r + c_i z)$$

$$N'_j = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j r + c_j z)$$

$$N'_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k r + c_k z)$$

où Δ est l'aire du triangle

$$\text{et } a_i = r_j z_k - r_k z_j$$

$$b_i = z_j - z_k$$

$$c_i = r_k - r_j$$

4.5.3 - Déformations

Le vecteur déformation sera un vecteur à 4 composantes :

$$\{\epsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\epsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z}$$

$$\epsilon_r = \frac{\delta u}{\delta r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta r}$$

Les déformations en fonction des déplacements nodaux s'exprime par la relation matricielle :

$$\{\epsilon\}_e = [B]_e \{\delta\}_e$$

avec :

$$[B] = [B_i, B_j, B_k]$$

$$[B_i] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & c_i \\ b_i & 0 \\ \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i z}{r} & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, B_j, \dots$$

Les coefficients de cette matrice $[B]$ s'expriment en fonction des coordonnées (r, z) . Les déformations ne seront donc pas constantes sur l'élément comme dans le cas du triangle plan.

4.5.4 - Contraintes - Matrice élasticité

Le vecteur contrainte $\{\sigma\}_e = \begin{pmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{pmatrix}$ s'exprime en

fonction du vecteur déformation :

$$\{\sigma\}_e = [D] \{\epsilon\}_e$$

Pour un matériau isotrope les relations entre contraintes et déformations s'écrivent :

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\theta)]$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)]$$

$$\gamma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tau_{rz}$$

et la matrice $|D|$ s'écrit :

$$|D| = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{vmatrix}$$

4.5.5 - Matrice raideur élémentaire

La formule générale :

$$|k|_e = \int_v |B|^T |D| |B| dv$$

reste valable

dans le cas présent elle s'écrit :

$$|k|_e = 2\pi \int_s |B|^T |D| |B| r dr dz$$

L'intégration se faisant sur la surface du triangle. Cette intégration n'est pas immédiate puisque la matrice $|B|$ est fonction des coordonnées.

Dans le cas du problème à 2 dimensions, la matrice raideur de l'élément $|k|_e$ s'exprime en fonction de sous-matrices (2 x 2)

$$|k_{rs}| = 2\pi \iint |B_r|^T |D| |B_j| r dr dz \quad (4-55-1)$$

chaque sous-matrice $|B|$ pouvant se mettre sous la forme d'une somme d'une matrice constante et d'une matrice variable.

$$\text{Par exemple } |B_i| = |\bar{B}_i| + |B'_i|$$

Avec $|\bar{B}_i|$ valeur de $|B_i|$ au centre de l'élément, donc valeur de $|B_i|$ pour $r = \bar{r} = (r_i + r_j + r_k) / 3$
 $z = \bar{z} = (z_i + z_j + z_k) / 3$

$|B'_i|$ s'écrivant alors :

$$|B'_i| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \left\{ \frac{1}{r} (a_i + c_i z) - \frac{1}{r} (a_i + c_i \bar{z}) \right\} \times \frac{1}{2\Delta} \quad (4-55-2)$$

En substituant cette expression dans $|k_{rs}|$ et en notant que :

$$\int |B'_i| r dz dr = 0$$

nous obtenons :

$$|k_{rs}| = |\bar{k}_{rs}| + |k'_{rs}|.$$

avec :

$$|\bar{k}_{rs}| = 2\pi |\bar{B}_r| |D| |\bar{B}_s| \bar{r} \Delta.$$

et $|k'_{rs}|$ un terme correctif qui s'écrit :

$$|k'_{rs}| = \frac{2\pi}{(2\Delta)^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times |D| \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} *$$

$$\int_s \left\{ \frac{1}{r} (a_r + c_r z) - \frac{1}{r} (a_r + c_r \bar{z}) \right\} \left\{ \frac{1}{r} (a_s + c_s z) - \frac{1}{r} (a_s + c_s \bar{z}) \right\} r dr dz$$

Cette dernière se ramenant au calcul de 3 intégrales

$$\int_s \frac{1}{r} dr dz = \Delta \times I_1$$

$$\int_s \frac{z}{r} dr dz = \Delta \times I_2$$

$$\int_s \frac{z^2}{r} dr dz = \Delta \times I_3,$$

finalemant $|k'_{rs}|$ s'écrit :

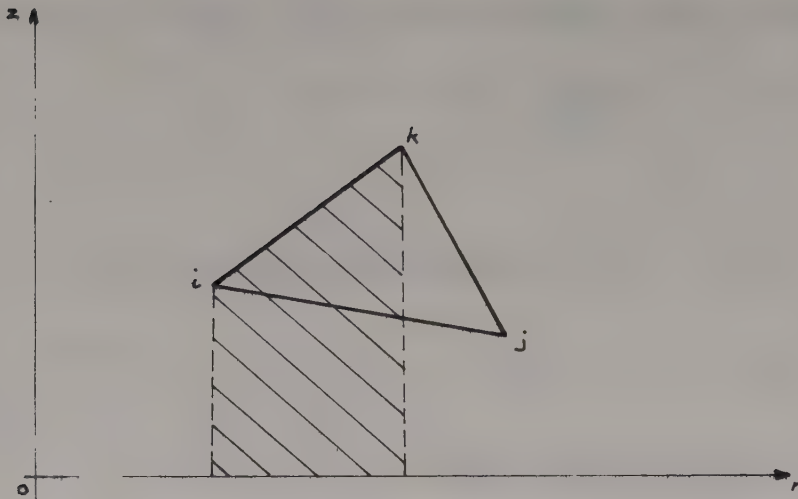
$$|k'_{rs}| = \frac{\pi}{2\Delta} \begin{vmatrix} D_{33} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \left\{ a_r a_s \left(I_1 - \frac{1}{r} \right) + (a_r c_s + a_s c_r) \left(I_2 - \frac{\bar{z}}{r} \right) + \right.$$

$$\left. + c_r c_s \left(I_3 - \frac{\bar{z}^2}{r} \right) \right\}$$

avec $D_{33} = \frac{E (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 + 2\nu)}$

et I_1, I_2, I_3 s'expriment en fonction des coordonnées nodales seulement

Calcul des intégrales I_1, I_2, I_3



L'intégration sur la surface du triangle peut se faire en calculant l'intégrale sur les aires comprises sur les 3 côtés (ij, jk, ki) du triangle.

L'équation du segment ik est :

$$z = A_{ik} + B_{ik} r$$

avec

$$A_{ik} = \frac{r_k z_i - r_i z_k}{r_k - r_i} \quad B_{ik} = \frac{z_k - z_i}{r_k - r_i}$$

La 1ère intégrale sous la ligne ik s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{r=r_i}^{r=r_k} \int_{z=0}^{z=A_{ik}+B_{ik}r} \frac{1}{r} dr dz &= \int_{r=r_i}^{r=r_k} \frac{1}{r} (A_{ik} + B_{ik} r) dr \\ &= \underline{A_{ik} \log \frac{r_k}{r_i} + B_{ik} (r_k - r_i)} \end{aligned}$$

De la même manière on calcule les 2 autres intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{r=r_i}^{r=r_k} \int_{z=0}^{z=A_{ik}+B_{ik}r} \frac{z}{r} dr dz &= \int_{r=r_i}^{r=r_k} \frac{(A_{ik} + B_{ik} r)^2}{2r} dr \\ &= \underline{\frac{A_{ik}^2}{2} \log \frac{r_k}{r_i} + A_{ik} B_{ik} (r_k - r_i) + \frac{B_{ik}^2}{4} (r_k^2 - r_i^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \int_{r=r_i}^{r=r_k} \int_{z=0}^{z=A_{ik} + B_{ik} r} \frac{z^2}{r} dr dz &= \int_{r=r_i}^{r=r_k} \frac{1}{r} \frac{(A_{ik} + B_{ik} r)^3}{3} dr \\ &= \frac{1}{3} (A_{ik})^3 \text{Log} \frac{r_k}{r_i} + (A_{ik})^2 B_{ik} (r_k - r_i) + A_{ik} B_{ik}^2 (r_k^2 - r_i^2) + \\ &\quad + \frac{B_{ik}^3}{9} (r_k^3 - r_i^3) \end{aligned}$$

Finalement les 3 intégrales I_1, I_2, I_3 sont égales à :

$$\underline{\Delta x}^{I_1} = (A_{ji} - A_{ik}) \text{Log} r_i + (A_{kj} - A_{ji}) \text{Log} r_j + (A_{ik} - A_{kj}) \text{Log} r_k$$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta x}^{I_2} &= \frac{1}{2} \left\{ (A_{ji}^2 - A_{ik}^2) \text{Log} r_i + (A_{kj}^2 - A_{ji}^2) \text{Log} r_j + (A_{ik}^2 - A_{kj}^2) \text{Log} r_k \right\} \\ &\quad + A_{ik} B_{ik} (r_k - r_i) + A_{kj} B_{kj} (r_j - r_k) + A_{ji} B_{ji} (r_i - r_j) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ B_{ik}^2 (r_k^2 - r_i^2) + B_{kj}^2 (r_j^2 - r_k^2) + B_{ji}^2 (r_i^2 - r_j^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta x}^{I_3} &= \frac{1}{3} \left\{ (A_{ji}^3 - A_{ik}^3) \text{Log} r_i + (A_{kj}^3 - A_{ji}^3) \text{Log} r_j + (A_{ik}^3 - A_{kj}^3) \text{Log} r_k \right\} \\ &\quad + A_{ik}^2 B_{ik} (r_k - r_i) + A_{kj}^2 B_{kj} (r_j - r_k) + A_{ji}^2 B_{ji} (r_i - r_j) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ A_{ik} B_{ik}^2 (r_k^2 - r_i^2) + A_{kj} B_{kj}^2 (r_j^2 - r_k^2) + A_{ji} B_{ji}^2 (r_i^2 - r_j^2) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{9} \left\{ B_{ik}^3 (r_k^3 - r_i^3) + B_{kj}^3 (r_j^3 - r_k^3) + B_{ji}^3 (r_i^3 - r_j^3) \right\} \end{aligned}$$

Plusieurs problèmes peuvent se poser lors du calcul de ces intégrales :

- pour un segment ij de longueur nulle : dans ce cas A_{ij} et B_{ij} deviennent infinie, en réalité il suffit de considérer la figure précédente pour constater que l'intégrale prise sous le segment ij est nulle donc il suffit de prendre

$$A_{ij} = B_{ij} = 0.$$

- pour un segment où r_i ou r_j est nul, $\text{Log} \frac{r_j}{r_i}$ devient infini. Par un développement limité on montre qu'il suffit de prendre au lieu de $\text{Log} \frac{r_j}{r_i}$:

- 1) si $r_i \neq 0$ $r_j = 0$: $\text{Log } r_i$
- 2) si $r_i = 0$ $r_j \neq 0$: $\text{Log } r_j$
- 3) si $r_i = 0$ $r_j = 0$: 0

4.5.6 - Matrice raideur totale

Ayant calculé toutes les matrices raideurs élémentaires, la matrice raideur de la structure complète sera constituée en additionnant en chaque noeud toutes les forces élémentaires provenant de chaque élément entourant le noeud.

En calculant le vecteur des forces extérieures $|R|$, et en imposant les conditions limites, on obtient comme pour les cas bi-dimensionnels un système d'équations linéaires à résoudre.

4.5.7 - Calcul des contraintes

En symétrie axiale les contraintes contrairement aux problèmes plans ne sont plus constantes sur l'élément, la matrice $|B|$ dépendant des coordonnées d'un point intérieur à l'élément.

On calculera donc le vecteur contrainte au centre de l'élément.

Nous aurons alors :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} |D| & |\bar{B}| \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \end{Bmatrix}_e$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ \end{Bmatrix}_e = \text{vecteur contrainte au centre de l'élément.}$$

$$|\bar{B}| \text{ valeur de } B \text{ au centre de l'élément}$$

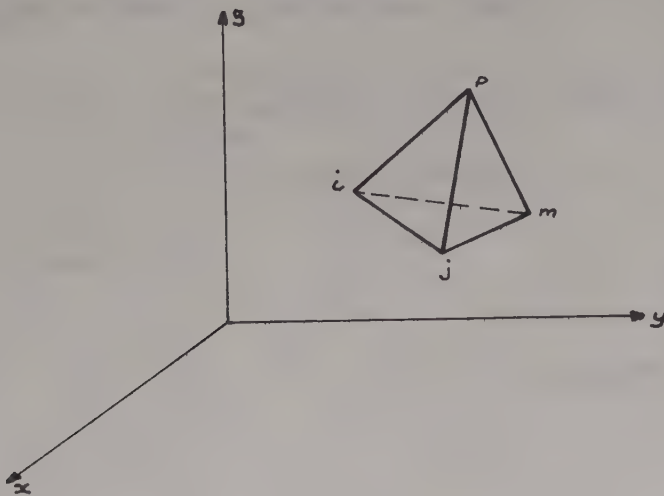
$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \end{Bmatrix}_e \text{ vecteur des déplacements nodaux.}$$

4.6 - METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR LES PROBLEMES A 3 DIMENSIONS

La méthode des éléments finis appliquée aux problèmes à 3 dimensions ne présente pas de grandes différences quant à la mise en équation par rapport aux problèmes à 2 dimensions.

Nous allons donner les différentes phases de la mise en équation pour l'élément caractéristique le plus simple : le tétraèdre.

Considérons dans l'espace à 3 dimensions un élément tétraédrique défini par ses noeuds i, j, m, p



4.6.1 - Fonction déplacement

La fonction déplacement conforme par analogie aux problèmes plans s'écrit :

$$\{f\}_e = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{cases}$$

Les différents coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$ étant déterminés en considérant les déplacements particuliers de chacun des noeuds :

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \\ v_i = \alpha_5 + \alpha_6 x_i + \alpha_7 y_i + \alpha_8 z_i \\ w_i = \alpha_9 + \alpha_{10} x_i + \alpha_{11} y_i + \alpha_{12} z_i \end{cases}$$

De même pour les noeuds j, m, r .

Finalement les 3 composantes du déplacement s'écrivent :

$$u = \frac{1}{6V} \left\{ \begin{aligned} & (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i \\ & + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) u_j \\ & + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) u_m \\ & + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) u_p \end{aligned} \right\} \quad (4-61-1)$$

et d'une manière identique, v, w .

avec V : volume de l'élément :

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}$$

$$\text{et } a_i = \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}$$

$$b_i = \det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}$$

Ces 4 constantes étant les cofacteurs du déterminant (4x4) précédent par rapport à la 1ère ligne.

$$c_i = \det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}$$

$$d_i = - \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix}$$

Les autres coefficients étant déterminés par permutation circulaire de i, j, m, p.

Donc la fonction déplacement s'écrit :

$$\left\{ \begin{matrix} f \\ \end{matrix} \right\}_e = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} |I| & N'_i & , & |I| & N'_j & , & |I| & N'_m & |I| & N'_p \end{matrix} \right| \left\{ \delta \right\}_e$$

$$\text{avec } \left\{ \delta \right\}_e = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_p \end{pmatrix} \quad \left\{ \delta_i \right\} = \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{vmatrix}$$

$$\text{et } N'_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad (4-61-2)$$

etc .

4.6.2 - Déformations

Le vecteur déformation $\left\{ \epsilon \right\}_e$ est à 6 composantes :

$$\left\{ \epsilon \right\}_e = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

La relation entre déformations et déplacements

$$\left\{ \epsilon \right\}_e = |B| \left\{ \delta \right\}_e$$

s'écrit dans ces conditions :

$$\left\{ \epsilon \right\}_e = \left| \begin{matrix} B_i & , & B_j & , & B_m & , & B_p \end{matrix} \right| \left\{ \delta \right\}_e$$

avec $|B_i| = \frac{1}{6V}$

$$\begin{vmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{vmatrix}$$

(4-61-3)

de même $|B_j|, |B_m|, |B_p|$

4.6.3 - Contraintes

La relation entre contraintes et déformations s'écrit toujours :

$$\{\sigma\}_e = |D| \{\epsilon\}_e$$

le vecteur contrainte $\{\sigma\}_e$ ayant 6 composantes

$$\{\sigma\}_e = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{vmatrix}$$

$|D|$: matrice élasticité définie au chapitre (3.3)

4.6.4 - Matrice raideur élémentaire

La matrice $|B|$ étant à coefficients constants, la matrice raideur élémentaire $|k|_e$ est composée de sous-matrices (3x3) définies par la relation:

$$|k_{rs}| = |B_r|^T |D| |B_s| V$$

V : volume de l'élément.

4.6.5 - Matrice raideur totale

La matrice raideur totale de la structure est obtenue en additionnant en chaque noeud les sous-matrices $|k_{rs}|$ de tous les éléments entourant le noeud.

Le vecteur des forces nodales équivalentes $\{F\}$ étant connu, on détermine les déplacements de chacun des noeuds en résolvant le système $\{F\} = |K|\{\Delta\}$

V - METHODE DES ELEMENTS FINIS - APPLICATIONS PRATIQUES

Lorsque nous avons commencer notre étude de détermination des majorations de contraintes dans les structures planes par la méthode des Eléments finis, celle-ci était encore assez peu développée en France et les programmes de calcul par ordinateur, n'étaient pas encore mis à la disposition du public.

Il nous a donc été nécessaire pour conduire notre étude d'élaborer un programme.

Pour justifier et mettre en évidence les différentes phases du programme, nous traiterons un exemple très simple : une plaque rectangulaire soumise à un moment de flexion dans son plan.

L'étude de ce problème présente plusieurs avantages :

1 - Etant traité dans l'ouvrage de Monsieur Zienkiewicz la comparaison des résultats sera possible.

2 - La simplicité de ce problème est telle, qu'il est possible de le résoudre manuellement, ce qui permet de mieux décomposer et analyser les différentes phases du calcul.

Ce programme étant testé, nous étudions plusieurs structures dans le cas de déformations planes. En particulier nous déterminons les majorations de contraintes dans :

- des plaques en traction percées d'orifices (cercles, ellipses)
- des structures d'intérêt industriel :
 - organe de presse
 - crémaillère

D'autre part, ces différents problèmes n'ayant pas été traités par la méthode des éléments finis, notre souci a été, chaque fois que c'était possible, de comparer nos résultats avec des résultats obtenus en photoélasticité.

5.1 - MISE AU POINT D'UN PROGRAMME - ETUDE D'UNE PLAQUE SOUMISE A UN MOMENT DE FLEXION DANS SON PLAN -

5.1.1 Idéalisation de la structure

L'élément caractéristique choisi est l'élément triangulaire à 6 degrés de liberté. Pour ce cas particulier, les triangles construits sont rectangles-isocèles, les cotés de l'angle droit étant égaux à l'unité.

Le découpage obtenu est montré par la figure (5.11) ainsi que la numérotation correspondante des noeuds.

Cette numérotation régulière des noeuds est nécessaire pour obtenir une matrice raideur sous forme de "matrice bande".

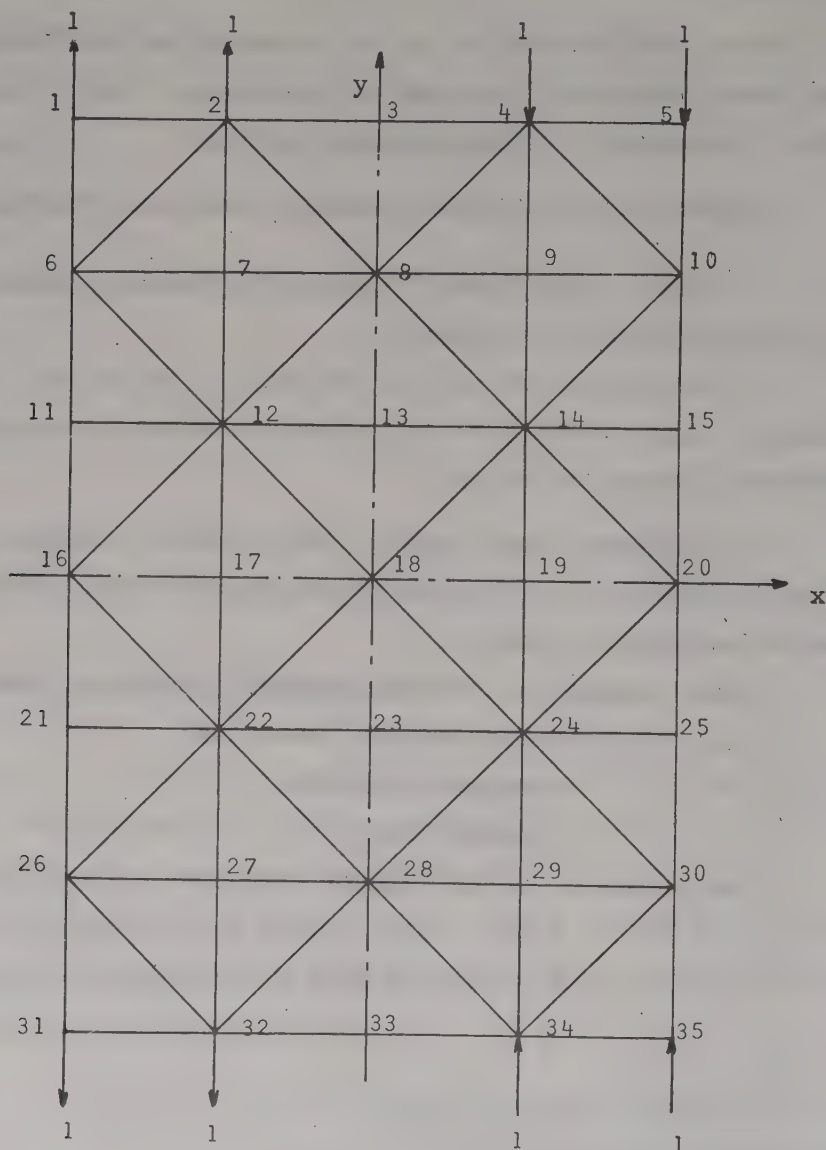


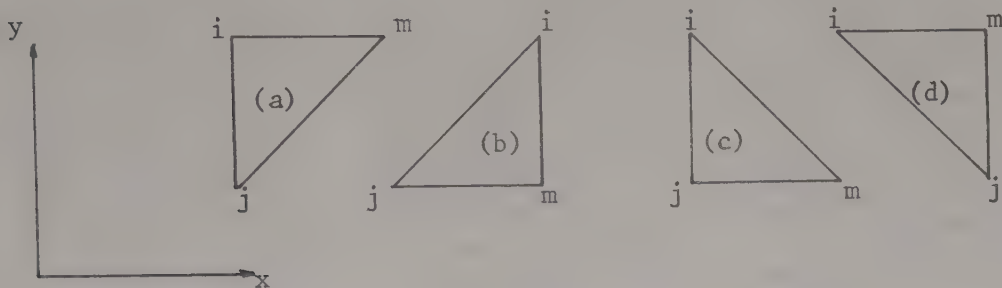
Fig. 5-11.

Les noeuds i, j, m de chaque élément sont déterminés par une rotation dans le sens trigonométrique, ainsi nous obtenons les triangles suivants :

1,6,2 - 2,6,7 - 2,7,8 - 2,8,3 - etc...

5.1.2 Calcul des caractéristiques de chaque élément

Le découpage adopté conduit à des éléments identiques à 4 espèces de triangles, qui ne se différencient que par leur orientation par rapport aux axes. Ce sont les 4 espèces suivantes :



Le problème est donc ramené à la détermination des caractéristiques de ces 4 éléments (a), (b), (c), (d).

a) Calcul des matrices $[B]$

Rappelons que pour un élément triangulaire quelconque, (i, j, m) , $[B]$, s'écrit sous la forme suivante :

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}$$

avec $b_i = y_j - y_m$

$b_j = y_m - y_i$

$b_m = y_i - y_j$

et

$c_i = x_m - x_j$

$c_j = x_i - x_m$

$c_m = x_j - x_i$

Δ : aire de l'élément.

Ces différents coefficients ne font intervenir que les différences de coordonnées de chaque noeud d'un triangle ; ils seront donc indépendants de la position de l'élément dans la structure pour une espèce donnée.

Nous n'avons donc que 4 matrices $|B|$ à déterminer

$$|B|_a, |B|_b, |B|_c, |B|_d.$$

Calcul de $|B|_a$

Les cotés de l'angle droit étant égaux à 1 : $2\Delta = 1$

Puisque les différents b_k et c_k ne sont fonction que des coordonnées relatives des noeuds, posons :

$$\begin{array}{lll} x_i = 0 & \text{d'où} & x_j = 0 \\ y_i = 0 & & y_j = -1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} x_m = 1 \\ y_m = 0 \end{array}$$

$$\text{et} \quad \begin{array}{ll} b_i = -1 & c_i = 1 \\ b_j = 0 & c_j = -1 \\ b_m = 1 & c_m = 0 \end{array}$$

$$\text{et } |B|_a = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{pouvant encore s'écrire}$$

$$|B|_a = |B_i, B_j, B_m|$$

$$\text{avec} \quad |B_i| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ +1 & -1 \end{vmatrix} \quad |B_j| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad |B_m| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Un calcul analogue donne les valeurs de $|B|_b, |B|_c, |B|_d$

Calcul de $|B|_b$

$$\begin{array}{lll} x_i = 0 & x_j = -1 & x_m = 0 \\ y_i = 0 & y_j = -1 & y_m = -1 \end{array}$$

$$|B|_b = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

B_i
 B_j
 B_m

Calcul de $|B|_c$

$$\begin{aligned} x_i &= 0 \\ y_i &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_j &= 0 \\ y_j &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_m &= 1 \\ y_m &= -1 \end{aligned}$$

$$|B|_c = \left| \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

B_i B_j B_m

Calcul de $|B|_d$

$$\begin{aligned} x_i &= 0 \\ y_i &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_j &= 1 \\ y_j &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_m &= 1 \\ y_m &= 0 \end{aligned}$$

$$|B|_d = \left| \begin{array}{cc|cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

B_i B_j B_m

b) Calcul des matrices $|D| \cdot |B|$

Le calcul de ces produits $|D| \cdot |B|$ est nécessaire pour permettre, connaissant les déplacements de calculer les contraintes.

en effet $|\sigma|_e = |D| \cdot |\epsilon|_e$

et $|\epsilon|_e = |B| \cdot |\delta|_e$

d'où $|\sigma|_e = |D| \cdot |B| \cdot |\delta|_e$

Posons $|P| = |D| \cdot |B|$

$|D|$ étant la matrice élasticité, le matériau étant homogène isotrope, $|D|$ sera identique pour tous les éléments. Nous aurons donc 4 espèces de matrices $|P|$:

$$|P_a|, \quad |P_b|, \quad |P_c|, \quad |P_d|$$

Chaque matrice $|P|$ peut se mettre sous la forme :

$$|P| = |P_i, P_j, P_m|$$

avec

$$\begin{aligned} |P_i| &= |D| |B_i| \\ |P_j| &= |D| |B_j| \\ |P_m| &= |D| |B_m| \end{aligned}$$

Nous avons :

$$|D| = \frac{E}{1-v^2} \begin{vmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{vmatrix}$$

Nous obtenons donc pour les éléments (a) :

$$|P_i|_a = \frac{E}{1-v^2} \begin{vmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{vmatrix} -1 & v \\ -v & 1 \\ \frac{1-v}{2} & -(\frac{1-v}{2}) \end{vmatrix}$$

De même :

$$|P_j|_a = \frac{E}{1-v^2} \begin{vmatrix} 0 & -v \\ 0 & -1 \\ -(\frac{1-v}{2}) & 0 \end{vmatrix} \quad |P_m|_a = \frac{E}{1-v^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 0 \\ 0 & \frac{1-v}{2} \end{vmatrix}$$

$$\text{et } |P|_a = \frac{E}{1-v^2} \begin{vmatrix} -1 & v & 0 & -v & 1 & 0 \\ -v & 1 & 0 & -1 & v & 0 \\ \frac{1-v}{2} & -(\frac{1-v}{2}) & -(\frac{1-v}{2}) & 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{vmatrix}$$

D'une manière analogue, nous calculons les matrices $|P|_b$, $|P|_c$, $|P|_d$

$$|P|_b = \frac{E}{1-v^2} \begin{vmatrix} 0 & v & -1 & 0 & 1 & -v \\ 0 & 1 & -v & 0 & v & -1 \\ \frac{1-v}{2} & 0 & 0 & -(\frac{1-v}{2}) & -(\frac{1-v}{2}) & 0 \end{vmatrix}$$

$$|P_c| = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 0 & \nu & -1 & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\nu & -1 & \nu & 0 \\ \frac{1-\nu}{2} & 0 & \frac{-(1-\nu)}{2} & \frac{-(1-\nu)}{2} & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}$$

$$\text{et } |P_d| = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -\nu & 1 & \nu \\ -\nu & 0 & 0 & -1 & \nu & 1 \\ 0 & \frac{-(1-\nu)}{2} & \frac{-(1-\nu)}{2} & 0 & \frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}$$

c) Calcul des matrices raideurs élémentaires $|k_a|$, $|k_b|$, $|k_c|$, $|k_d|$

Nous avons montré précédemment que chaque matrice $|k|$ élémentaire se mettait sous forme de sous-matrices $|k_{rs}|$ de dimensions (2,2) dans le cas de problèmes plans.

$$\text{avec } |k_{rs}| = |B_r|^T |D| |B_s| \times t \times \Delta$$

Δ : aire de l'élément

t : épaisseur de l'élément

$$\text{C'est-à-dire } |k_{rs}| = |B_r|^T \times |P_s| \times \Delta \times t$$

soit pour la matrice $|k_a|$:

$$|k_{ii}|_a = |B_i|_a^T \times |P_i|_a \times \Delta \times t$$

$$|k_{ij}|_a = |B_i|_a^T \times |P_j|_a \times \Delta \times t$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } |k_{ii}|_a &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \nu \\ -\nu & 1 \\ \frac{1-\nu}{2} & \frac{-(1-\nu)}{2} \end{vmatrix} \times \frac{E}{1-\nu^2} \times \Delta \times t \\ &= \frac{E \times \Delta \times t}{1-\nu^2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{3-\nu}{2} & \frac{-(1+\nu)}{2} \\ \frac{-(1+\nu)}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De la même façon, nous obtenons, $|k_{ij}|_a$, $|k_{im}|_a$,

D'où

$$|k_a| = \frac{E x \Delta x t}{1-v^2}$$

i		j		m	
$\frac{3-v}{2}$	$\frac{-(1+v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	v	-1	$\frac{1-v}{2}$
$\frac{-(1+v)}{2}$	$\frac{3-v}{2}$	$\frac{1-v}{2}$	-1	v	$\frac{-(1-v)}{2}$
$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{1-v}{2}$	$\frac{1-v}{2}$	0	0	$\frac{-(1-v)}{2}$
v	-1	0	1	-v	0
-1	+v	0	-v	1	0
$\frac{1-v}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	0	0	$\frac{1-v}{2}$

$$|k_b| = \frac{E x \Delta x t}{1-v^2}$$

$\frac{1-v}{2}$	0	0	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{1-v}{2}$
0	1	-v	0	v	-1
0	$\frac{-(1-v)}{2}$	1	0	-1	v
-v	0	0	$\frac{1-v}{2}$	$\frac{1-v}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$
$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{1-v}{2}$	-1	$\frac{1-v}{2}$	$\frac{3-v}{2}$	$\frac{-(1+v)}{2}$
v	1	v	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1+v)}{2}$	$\frac{3-v}{2}$

$$|k_c| = \frac{E x \Delta x t}{1-v^2}$$

$\frac{1-v}{2}$	0	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	0	$\frac{1-v}{2}$
0	1	-v	-1	v	0
$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{3-v}{2}$	$\frac{1+v}{2}$	-1	$\frac{-(1-v)}{2}$
-v	-1	$\frac{1+v}{2}$	$\frac{3-v}{2}$	-v	$\frac{-(1-v)}{2}$
0	$\frac{1-v}{2}$	-1	-v	1	0
v	0	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	0	$\frac{1-v}{2}$

$$|k_d| = \frac{E x \Delta x t}{1-v^2}$$

1	0	0	v	-1	$\frac{-(1-v)}{2}$
0	$\frac{1-v}{2}$	$\frac{1-v}{2}$	0	-v	$\frac{-(1-v)}{2}$
0	v	$\frac{1-v}{2}$	0	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$
$\frac{1-v}{2}$	0	0	1	-v	-1
-1	-v	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{3-v}{2}$	$\frac{1+v}{2}$
$\frac{-(1-v)}{2}$	-1	-v	-1	$\frac{1+v}{2}$	$\frac{3-v}{2}$

Nous remarquons que ces 4 matrices possèdent une certaine similitude, les sous-matrices intervenant étant de forme identique.

5.1.3 Assemblage de la structure

Ayant déterminé les matrices raideurs pour chaque élément intervenant dans la structure, la matrice raideur $|K|$ totale sera obtenue en superposant tous ces éléments avec respect de la concordance des noeuds.

Considérons un élément quelconque $i j m$, la matrice raideur correspondante est :

$$|k| = \begin{vmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{vmatrix}$$

Les sous-matrices k_{rs} , lors de la superposition des éléments, se placent dans la matrice $|K|$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} |k_{ii}| & \text{lignes et colonnes} & i, i+1 \\ |k_{ij}| & \text{lignes} & i, i+1 \\ & \text{colonnes} & j, j+1 \end{array}$$

et d'une manière générale

$$\begin{array}{lll} |k_{rs}| & \text{lignes} & r, r+1 \\ & \text{colonnes} & s, s+1 \end{array}$$

r et s étant 2 numéros de noeuds de l'élément considéré.

Donc à chaque ligne et colonne de $|K|$ nous aurons l'addition des différentes sous-matrices $|k_{rs}|$ intervenant dans les matrices $|k|$ des éléments entourant le noeud considéré.

Compte tenu que chaque ligne de noeuds est une ligne de partition, la matrice $|K|$ obtenue sera une matrice bande, tridiagonale se présentant comme la composition des différents blocs suivants :

$$|K| = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 \\ \hline 1 & K_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 5 & C_1^T & K_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 10 & 0 & C_2^T & K_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 & \\ 15 & 0 & 0 & C_3^T & K_4 & C_4 & 0 & 0 & \\ 20 & 0 & 0 & 0 & C_4^T & K_5 & C_5 & 0 & \\ 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_5^T & K_6 & C_6 & \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6^T & K_7 & \\ 35 & & & & & & & & \end{array}$$

Avec dans le cas particulier :

$$K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K_6$$

$$C_1 = C_3 = C_5$$

$$C_2 = C_4 = C_6$$

Les différents blocs $|K_i|$, $|C_i|$, $|C_i|^T$ sont remplis de la manière suivante :

Les sous-matrices élémentaires de la ligne de noeuds (i) se placent uniquement dans les blocs $|K_i|$, $|C_i|$, $|C_i|^T$ ou $|K_{i+1}|$: lorsque tous les éléments correspondant à la ligne de noeuds (i) auront été considérés, les blocs $|K_i|$, $|C_i|$, $|C_i|^T$ seront complets ; le bloc $|K_{i+1}|$ est complété en considérant les éléments de la ligne de noeuds (i+1).

Les valeurs de ces différents blocs $|C_i|$ et $|K_i|$ sont explicitées ci-dessous.

		K1									
		1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
K1/α =	1	$\frac{3-v}{2}$	$\frac{-(1+v)}{2}$	- 1	$\frac{1-v}{2}$						
	1	$\frac{-(1+v)}{2}$	$\frac{3-v}{2}$		$\frac{-(1-v)}{2}$						
	2	- 1	v	3-v	0	- 1	-v				
	2	$\frac{+(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	0	3-v	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$				
	3			- 1	$\frac{-(1-v)}{2}$	3-v	0	- 1	$\frac{+(1-v)}{2}$		
	3			- v	$\frac{-(1-v)}{2}$	v	$\frac{-(1-v)}{2}$		$\frac{-(1-v)}{2}$		
	4					- 1	v	3-v	0	- 1	- v
	4					$\frac{+(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	0	3-v	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$
	5							- 1	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{3-v}{2}$	$\frac{-(1+v)}{2}$
	5							- v	$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1+v)}{2}$	$\frac{3-v}{2}$

		C1									
		6	6	7	7	8	8	9	9	10	10
C1/α =	1	$\frac{-(1-v)}{2}$	v								
	1	$\frac{1-v}{2}$	- 1								
	2	0	$\frac{-(1+v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	0	0	$\frac{1+v}{2}$				
	2	$\frac{-(1+v)}{2}$	0	0	- 2	$\frac{1+v}{2}$	0				
	3					$\frac{-(1-v)}{2}$	0				
	3					0	- 2				
	4					0	$\frac{-(1+v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	0	0	$\frac{1+v}{2}$
	4					$\frac{-(1+v)}{2}$	0	0	- 2	$\frac{1+v}{2}$	0
	5									$\frac{-(1-v)}{2}$	-v
	5									$\frac{-(1-v)}{2}$	- 1

$$K = K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$$

$K/\alpha =$

$3-v$	0	-2	0						
0	$3-v$	0	$-(1-v)$						
-2	0	$2(3-v)$	0	-2	0				
0	$-(1-v)$	0	$2(3-v)$	0	$-(1-v)$				
		-2	0	$2(3-v)$	0	-2	0		
		0	$-(1-v)$	0	$2(3-v)$	0	$-(1-v)$		
				-2	0	$2(3-v)$	0	-2	0
				0	$-(1-v)$	0	$2(3-v)$	0	$-(1-v)$
						-2	0	$3-v$	0
						0	$-(1-v)$	0	$3-v$

C_2

$C_2/\alpha =$

$\frac{-(1-v)}{2}$	$\frac{-(1-v)}{2}$	0	$\frac{1+v}{2}$						
$-v$	-1	$\frac{1+v}{2}$	0						
		$-(1-v)$	0						
		0	-2						
		0	$\frac{-(1+v)}{2}$	$-(1-v)$	0	0	$\frac{1+v}{2}$		
		$\frac{-(1+v)}{2}$	0	0	-2	$\frac{1+v}{2}$	0		
						$-(1-v)$	0		
						0	-2		
						0	$\frac{-(1+v)}{2}$	$\frac{-(1-v)+(1-v)}{2}$	
						$\frac{-(1+v)}{2}$	0	v	-1

K7

$\frac{3-v}{2}$	$\frac{1+v}{2}$	-1	$-\frac{(1-v)}{2}$						
$\frac{1+v}{2}$	$\frac{3-v}{2}$	-v	$-\frac{(1-v)}{2}$						
-1	-v	$\frac{3-v}{2}$	0	-1	v				
$-\frac{(1-v)}{2}$	$-\frac{(1-v)}{2}$	0	$\frac{3-v}{2}$	$\frac{1-v}{2}$	$-\frac{(1-v)}{2}$				
		-1	$\frac{1-v}{2}$	$\frac{3-v}{2}$	0	-1	$-\frac{(1-v)}{2}$		
		v	$-\frac{(1-v)}{2}$	0	$\frac{3-v}{2}$	-v	$-\frac{(1-v)}{2}$		
				-1	-v	$\frac{3-v}{2}$	0	-1	v
				$-\frac{(1-v)}{2}$	$-\frac{(1-v)}{2}$	0	$\frac{3-v}{2}$	$\frac{1-v}{2}$	$-\frac{(1-v)}{2}$
						-1	$\frac{1-v}{2}$	$\frac{3-v}{2}$	$-\frac{(1+v)}{2}$
						v	$-\frac{(1-v)}{2}$	$-\frac{(1+v)}{2}$	$\frac{3-v}{2}$

K7/α =

avec $\alpha = \frac{E \times \Delta \times \tau}{1-v} = \frac{E}{2(1-v)^2}$ t = 1
Δ = 1/2

On vérifie facilement les différentes propriétés de la matrice |K|

- symétrie
 - somme des termes d'une ligne ou d'une colonne nulle
- par exemple pour la 1ère colonne

$$\frac{3-v}{2} - \frac{1+v}{2} - 1 + \frac{1-v}{2} - \frac{1-v}{2} + v = 0$$

5.1.4 Programme de Calcul

Le problème consiste à établir un programme de calcul sur ordinateur permettant de trouver les caractéristiques précédemment déterminées manuellement et de résoudre le système d'équations

$$[F] = [K] [\Delta]$$

A partir des résultats précédents nous avons établi un processus général dont nous expliquerons ici chaque phase.

5.14.1 Formation de la matrice raideur $[K]$

Cette matrice sera établie en déterminant chacun des blocs $[K_i]$, $[C_i]$, $[C_i]^T$, le calcul se fait donc par ligne de partition.

L'organigramme suivant donne les différentes étapes de ce calcul.

La capacité de l'ordinateur ne permettant pas de garder en mémoire centrale la matrice $[K]$ globale, un certain nombre de fichiers seront réservés sur disque afin de stocker les différents blocs de $[K]$ en particulier.

Ces fichiers seront :

- Fichier 'COORD'

Il permet de conserver les coordonnées x_i , y_i de tous les noeuds (i) de la structure.

- Fichier 'DIM'

Il conserve les dimensions des différents blocs $[K_i]$, $[C_i]$

- Fichier 'K'

Il permet de stocker les blocs $[K_i]$

- Fichier 'S'

Il permet de stocker les blocs $[C_i]$

Les blocs $[C_i]^T$ ne seront pas conservés. Ils seront déterminés à partir des $[C_i]$ chaque fois qu'ils devront intervenir dans les calculs.

La structure étant idéalisée, on détermine les coordonnées de chaque noeud qu'on enregistre sur le fichier 'COORD', la phase 'formation de la matrice raideur $[K]$ ' commence alors, les calculs se faisant à partir de la lecture de cartes données comportant les informations suivantes :

II, M, N, IP, IA, IB, IC, L

avec :

II : numéro de l'élément considéré

M : numéro du noeud sur la frontière de gauche de la ligne de noeuds considérée.

N : numéro du noeud sur la frontière de droite de la ligne de noeuds considérée.

IP : Numéro du noeud sur la frontière de droite de la ligne de noeuds suivante.

IA

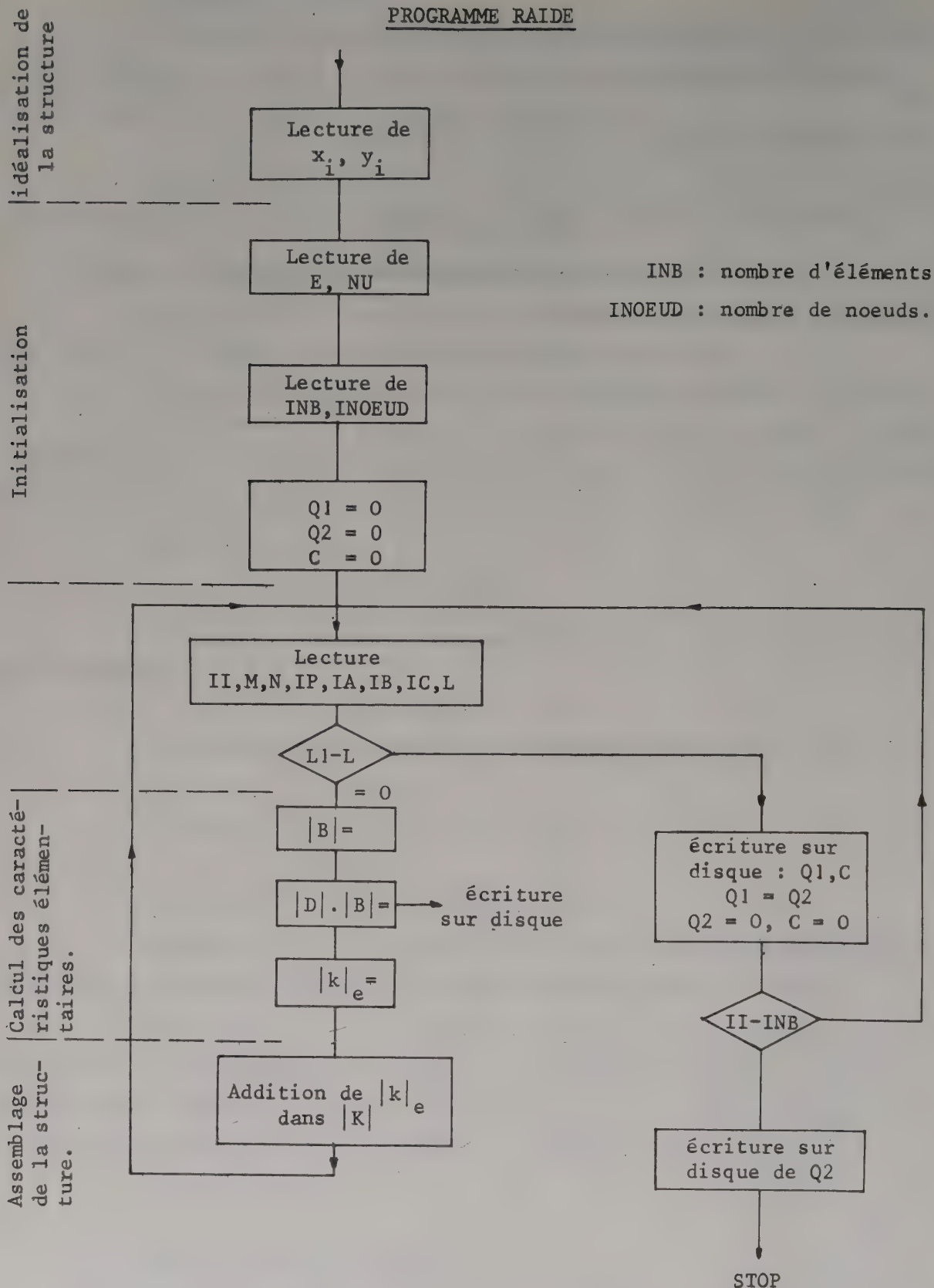
IB : Numéros des noeuds de l'élément considéré.

IC

L : numéro de la ligne de noeuds considérée.

Il y aura donc autant de cartes données que d'éléments composant la structure.

PROGRAMME RAIDE



Ce programme est constitué de 6 sous-programmes.

5.14.2 Introduction des forces

La matrice raideur $|K|$ étant formée, on introduit les forces extérieures appliquées sur la structure. Ces différentes forces sont représentées par leurs composantes X et Y suivant les axes. Elles sont enregistrées sur le fichier F du disque. A chaque ligne de partition, devra correspondre un vecteur force.

5.14.3 Introduction des déplacements imposés

Nous avons vu qu'une des propriétés de la matrice raideur était d'avoir la somme des termes d'une ligne ou d'une colonne nulle, donc la matrice $|K|$ est singulière ($\det |K| = 0$), elle ne peut donc pas être inversée.

La matrice $|K|$ est rendue régulière en introduisant les conditions limites : les déplacements connus.

On pratique alors une partition sur le vecteur $|\Delta|$, en regroupant les déplacements inconnus dans la partition $|\Delta_\alpha|$ et les déplacements connus dans la partition $|\Delta_\beta|$.

En pratiquant la même partition sur $|F|$ et sur $|K|$, la résolution du système $|F| = |K| |\Delta|$ se ramène à la résolution de :

$$\begin{vmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_\beta \end{vmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{vmatrix} F_\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{\alpha\beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_\beta \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} F_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{\beta\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{\beta\beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_\beta \end{vmatrix} \quad (2)$$

Le système (1) permettant de calculer les inconnues $|\Delta_\alpha|$,
le système (2) les inconnues $|F_\beta|$ (réactions).

Pratiquement, nous procéderons d'une manière différente, car cette méthode présente l'inconvénient de détruire la configuration initiale de la matrice $|K|$. Aussi le processus pour introduire un déplacement imposé sera le suivant :

Soit α_i la valeur du déplacement u du noeud i

Considérons l'équation correspondante du système $|F| = |K| |\Delta|$

soit :

$$X_i = a_1 u_1 + b_1 v_1 + a_2 u_2 + b_2 v_2 + \dots + a_i u_i + b_i v_i + \dots + a_n u_n + b_n v_n$$

On multiplie alors le terme a_i de la diagonale principale par un nombre N très grand, X_i étant remplacé par $N a_i \alpha_i$, l'équation précédente s'écrit donc :

$$N a_i \alpha_i = a_i u_i + b_i v_i + \dots + N a_i u_i + \dots + b_n v_n$$

Si N est suffisamment grand les termes $a_j u_j$ et $b_j v_j$ sont négligeables devant $N a_i u_i$ et l'on peut écrire :

$$N a_i \alpha_i = N a_i u_i$$

soit

$$u_i = \alpha_i$$

Afin d'obtenir une solution mathématique unique, il est nécessaire d'imposer un nombre minimum de déplacements :

- dans le cas de problèmes à 1 degré de liberté (ressorts)

il est nécessaire d'imposer au moins 1 déplacement.

- dans le cas de problèmes plans à 2 degrés de liberté, il est

nécessaire d'imposer au moins 3 déplacements :

- 1 déplacement pour éviter la translation de la structure suivant Ox .

- 1 déplacement pour éviter la translation de la structure suivant Oy .

- 1 déplacement pour éviter la rotation de la structure.

5.14.4 Résolution du système d'équations linéaires

Pour résoudre le système $[F] = [K] [\Delta]$, nous procédons par partitions. Ces partitions correspondent aux lignes de noeuds. Donc sous forme matricielle le système $[F] = [K] [\Delta]$ peut s'écrire :

$$\begin{array}{lcl} |F_1| = |K_1| |\Delta_1| + |C_1| |\Delta_2| & & - 1 - \\ |F_2| = |C_1|^T |\Delta_1| + |K_2| |\Delta_2| + |C_2| |\Delta_3| & & - 2 - \\ |F_3| = |C_2|^T |\Delta_2| + |K_3| |\Delta_3| + |C_3| |\Delta_4| & & - 3 - \\ |F_4| = |C_3|^T |\Delta_3| + |K_4| |\Delta_4| + |C_4| |\Delta_5| & & - 4 - \\ |F_5| = |C_4|^T |\Delta_4| + |K_5| |\Delta_5| + |C_5| |\Delta_6| & & - 5 - \\ |F_6| = |C_5|^T |\Delta_5| + |K_6| |\Delta_6| + |C_6| |\Delta_7| & & - 6 - \\ |F_7| = |C_6|^T |\Delta_6| + |K_7| |\Delta_7| & & - 7 - \end{array}$$

On résoud ce système en procédant par substitution suivant la méthode dérivée de Gauss-Jordan exposée précédemment.

De l'équation - 1 - on tire :

$$|K_1|^{-1} |F_1| - |K_1|^{-1} |C_1| |\Delta_2| = |\Delta_1|$$

L'équation - 2 - s'écrit alors :

$$|F_2| = |C_1|^T |K_1|^{-1} |F_1| - |C_1|^T |K_1|^{-1} |C_1| |\Delta_2| + |K_2| |\Delta_2| + |C_2| |\Delta_3|$$

Soit
$$|F_2| - |C_1|^T |K_1|^{-1} |F_1| = (|K_2| - |C_1|^T |K_1|^{-1} |C_1|) |\Delta_2| + |C_2| |\Delta_3|$$

et en posant :

$$|Y_2| = |F_2| - |C_1|^T |K_1|^{-1} |F_1|$$

et
$$|SP_2| = |K_2| - |C_1|^T |K_1|^{-1} |C_1|$$

- 2 - s'écrit :

$$|Y_2| = |SP_2| |\Delta_2| + |C_2| |\Delta_3|$$

d'où
$$|\Delta_2| = |SP_2|^{-1} |Y_2| - |SP_2|^{-1} |C_2| |\Delta_3|$$

On reporte alors cette valeur de $|\Delta_2|$ dans l'équation - 3 -, ce qui nous conduit à poser :

$$|Y_3| = |F_3| - |C_2|^T |SP_2|^{-1} |Y_2|$$

$$|SP_3| = |K_3| - |C_2|^T |SP_2|^{-1} |C_2|$$

et l'équation - 3 - s'écrit alors :

$$|Y_3| = |SP_3| |\Delta_3| + |C_3| |\Delta_4|$$

Donc la résolution du système conduit à calculer :

$$\begin{array}{l} 1 \\ |Y_1| = |F_1| \\ |SP_1| = |K_1| \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ |Y_2| = |F_2| - |C_1|^T |SP_1|^{-1} |Y_1| \\ |SP_2| = |K_2| - |C_1|^T |SP_1|^{-1} |C_1| \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \\ |Y_3| = |F_3| - |C_2|^T |SP_2|^{-1} |Y_2| \\ |SP_3| = |K_3| - |C_2|^T |SP_2|^{-1} |C_2| \end{array}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad |Y_4| &= |F_4| - |C_3|^T |SP_3|^{-1} |Y_3| \\ |SP_4| &= |K_4| - |C_3|^T |SP_3|^{-1} |C_3| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad |Y_5| &= |F_5| - |C_4|^T |SP_4|^{-1} |Y_4| \\ |SP_5| &= |K_5| - |C_4|^T |SP_4|^{-1} |C_4| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad |Y_6| &= |F_6| - |C_5|^T |SP_5|^{-1} |Y_5| \\ |SP_6| &= |K_6| - |C_5|^T |SP_5|^{-1} |C_5| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad |Y_7| &= |F_7| - |C_6|^T |SP_6|^{-1} |Y_6| \\ |SP_7| &= |K_7| - |C_6|^T |SP_6|^{-1} |C_6| \end{aligned}$$

Les déplacements étant obtenus en calculant :

$$|\Delta_7| = |SP_7|^{-1} |Y_7|$$

$$|\Delta_6| = |SP_6|^{-1} |Y_6| - |SP_6|^{-1} |C_6| |\Delta_7|$$

$$|\Delta_5| = |SP_5|^{-1} |Y_5| - |SP_5|^{-1} |C_5| |\Delta_6|$$

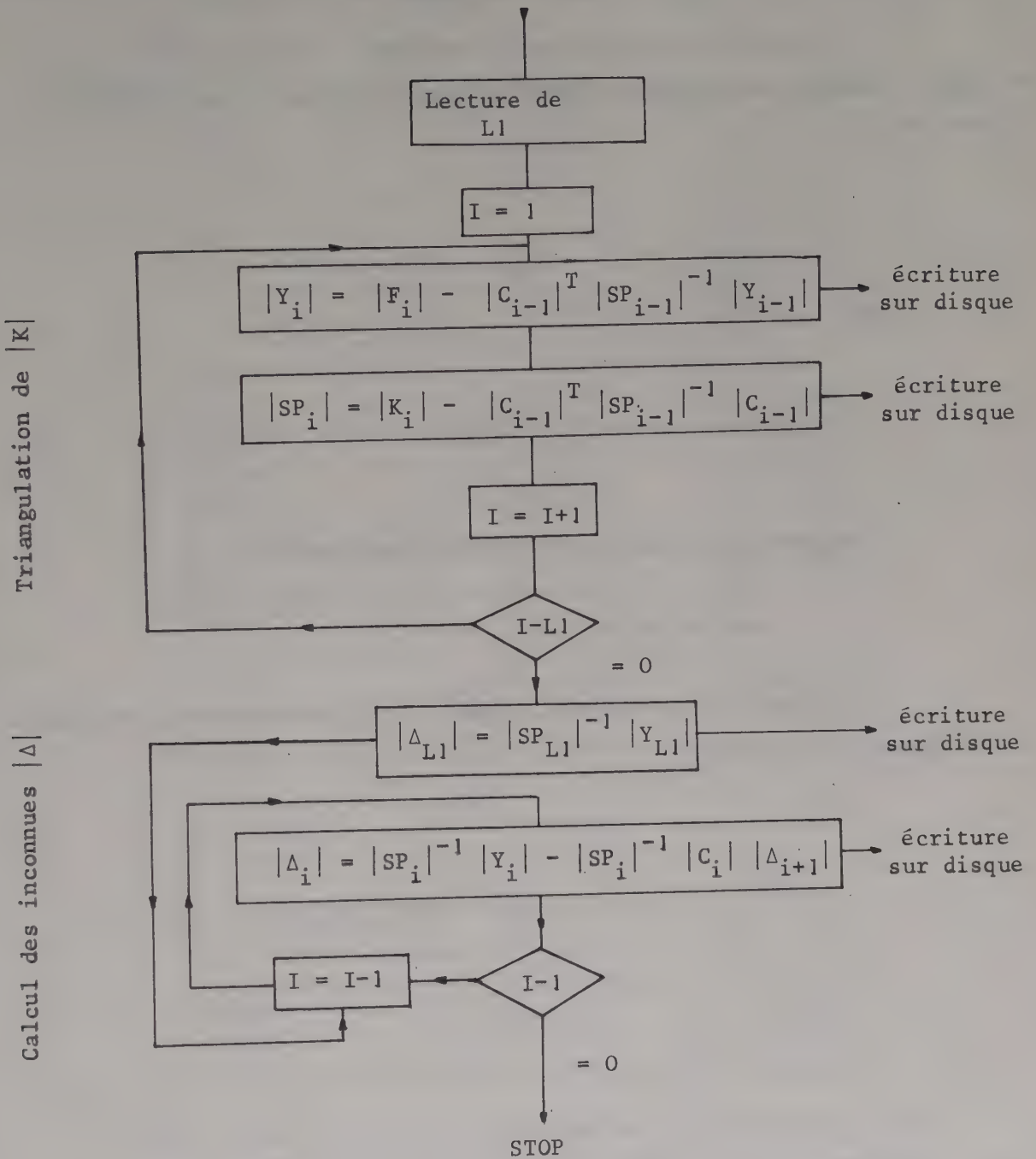
$$|\Delta_4| = |SP_4|^{-1} |Y_4| - |SP_4|^{-1} |C_4| |\Delta_5|$$

$$|\Delta_3| = |SP_3|^{-1} |Y_3| - |SP_3|^{-1} |C_3| |\Delta_4|$$

$$|\Delta_2| = |SP_2|^{-1} |Y_2| - |SP_2|^{-1} |C_2| |\Delta_3|$$

$$|\Delta_1| = |SP_1|^{-1} |Y_1| - |SP_1|^{-1} |C_1| |\Delta_2|$$

PROGRAMME FILEM



Ce programme est constitué de 6 sous-programmes.

5.14.5 Calcul des contraintes

Les déplacements calculés se présentent sous forme de vecteurs $D P_i (N, 1), N = 2n$, n étant le nombre de noeuds sur la ligne i .

A partir de ces vecteurs on détermine les déplacements u_i, v_i de chaque noeud i , et à chaque élément triangulaire A, B, C, on associe un vecteur $\{Y\}$:

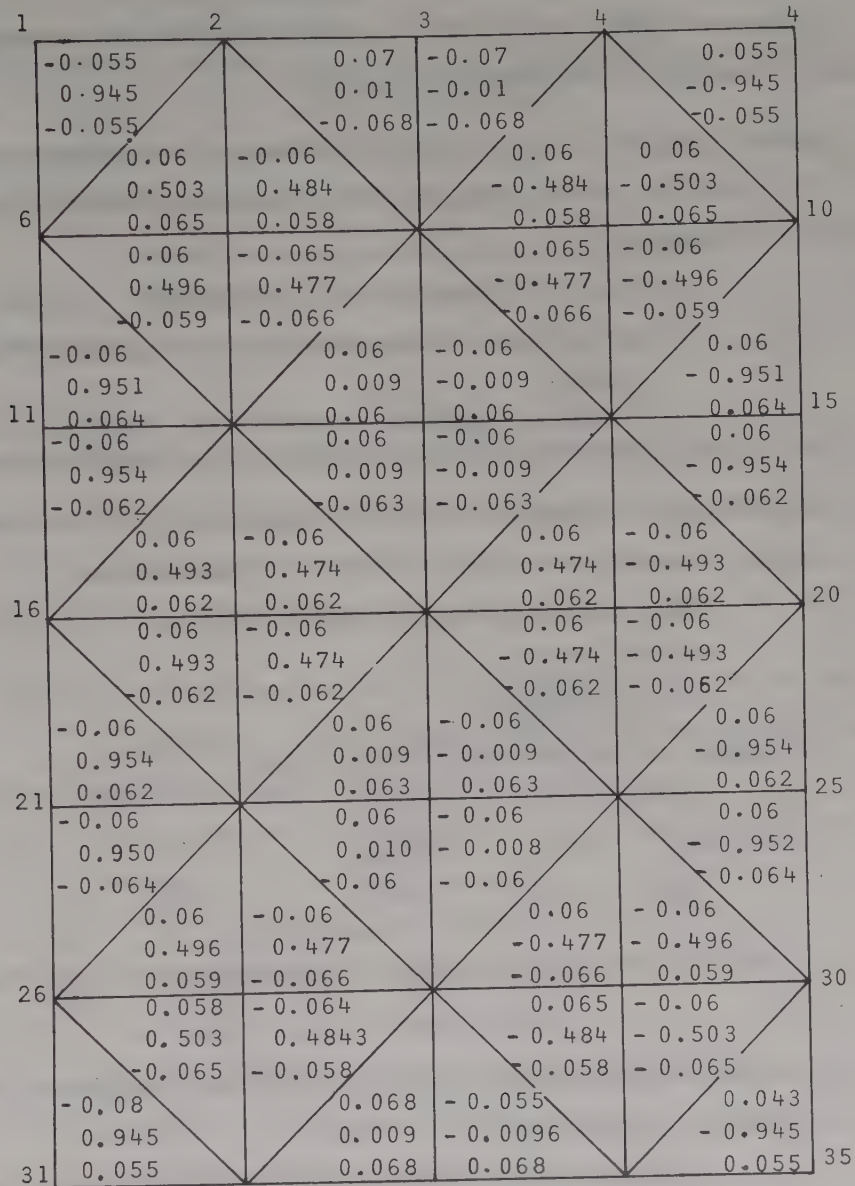
$$\{Y\} = \begin{vmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \\ u_c \\ u_b \end{vmatrix}$$

On peut donc calculer le vecteur contrainte $|\sigma|$

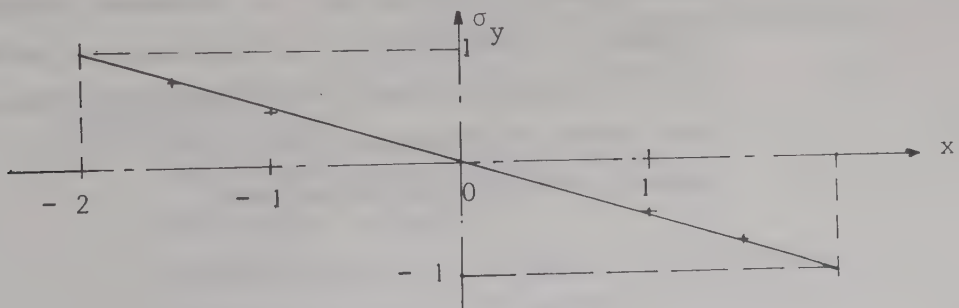
$$|\sigma| = |D| |B| \{Y\}$$

La connaissance de $|\sigma|$, permet alors de déterminer contraintes et directions principales.

L'exécution de ces différents programmes conduit aux résultats donnés par la figure suivante. Les valeurs portées sur chaque triangle correspondent aux contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} respectivement.



Nous pouvons noter la bonne symétrie des résultats : écart 1%
 La courbe suivante donne la comparaison entre la variation théorique de la contrainte σ_y de l'axe Ox et les résultats obtenus par le calcul.



5.14.6 Améliorations des performances du programme

Le programme que nous venons de décrire est optimisé pour de petits calculateurs, puisqu'il est exécutable sur :

- IBM 1130 : 8 K octets
- IBM 360-25 : 24 K octets

L'inconvénient majeur est la multiplicité des sous-programmes, d'où un temps de calcul relativement important.

Avec la mise en service d'un ordinateur de moyenne capacité : IBM 360-30 : 64 K octets, nous avons pu améliorer sensiblement les performances de notre programme :

- une seule phase pour le programme : RAIDE
- Deux phases principales pour le programme d'inversion (FILEM).

Les organigrammes précédents ne sont pratiquement pas modifiés.

Le principal avantage de cette adaptation sur ordinateur IBM 360-30 est le gain de temps, en effet à titre de comparaison :

pour une structure découpée en :

- 100 noeuds
- 160 éléments

les temps de calcul sont les suivants :

IBM 1130	:	≈	2 h
IBM 360-25	:	≈	35 mn
IBM 360-30	:		12' 30

Le coût du traitement sur ces 3 ordinateurs étant sensiblement identique.

Nous avons pu également apporter quelques améliorations tendant à simplifier le travail préparatoire, à savoir :

- détermination automatique des coordonnées des noeuds dans certains cas (crémaillère, plaques perforées). Cette détermination automatique se faisant en utilisant des sous programmes particuliers.
- détermination automatique des éléments triangulaires lorsque la continuité de la structure le permet, ou lecture carte par carte des différents éléments. Ces deux modes de détermination pouvant se faire simultanément pour une même structure.

Nous pouvons prendre en compte des éléments barres.

Nous n'avons pas cherché à résoudre simultanément plusieurs cas de chargement pour une structure, la disponibilité en mémoire étant limitée, mais on peut facilement prendre en considération ces différents cas de chargement en utilisant le programme DIFCHA.

Nous avons également augmenté la largeur de bande qui sur 1130 et 360-25 était de 10 noeuds, à 15 noeuds sur 360-30.

Elle pourrait être de 20 noeuds, mais il faudrait supprimer des phases de programme qui nous semblent intéressantes :

- détermination automatique des éléments
- prise en compte d'un seul élément caractéristique.

(Les listings de ces programmes sont donnés en annexe).

Comparaison avec d'autres programmes d'éléments finis

La majorité des programmes de calcul de structures par Eléments Finis existants actuellement, est utilisable sur des ordinateurs de grande capacité.

A titre d'exemple, nous pouvons citer :

- "MEF6" : Programme de Calcul du Centre d'Etudes de Mécanique des Roches - Ecole Nationale Supérieure des Mines à Paris.

Les caractéristiques de ce programme sont :

- Possibilité de prise en compte de 8 matériaux différents.
- capacité de mémoire centrale nécessaire :
 - . sur ordinateur IBM
(55 + 8 F) K octets
 - . sur control Data 6 600
(22 000 + F) mots (en décimal)

avec

$$F = 16 (P+1) (2P-1) \left(\frac{2N}{P} - 1\right) + N$$

N = nombre de noeuds du modèle

P = pas du maillage.

- "PLANE-STRESS" : Programme de calcul du Laboratoire d'Analyse des Contraintes des Professeurs KESTENS et VAN GEEN de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université libre de Bruxelles.

Caractéristiques :

- Utilisable sur ordinateur CDC 6 400
- 900 noeuds maximum
- prise en compte de 12 matériaux différents
- largeur de bande : 39 noeuds.

- "ASKA" : Programme de calcul de la S.I.A.

Caractéristiques

- utilisable sur ordinateur CDC 6 600
- une étude peut comporter jusqu'à 30 000 inconnues
- 500 cas de charges peuvent être pris en compte
- Toutes les formes de structures peuvent être envisagées (dalles, voutes, coques, massifs).
- ASKA possède une bibliothèque de 30 types d'éléments.
- Un noeud peut posséder jusqu'à 32 degrés de liberté.

donc programme de calcul très général mais dont le prix de revient est élevé.

Donc si les performances de notre programme sont relativement modestes en comparaison des programmes précédents, son avantage par rapport à ceux-ci est son utilisation sur des ordinateurs de faible et moyenne capacité très répandus.

Son prix de revient modique le rend accessible à un grand nombre d'utilisateurs.

5.1.5 Etude de Convergence - Précision de la méthode

Aux trois principes variationnels réduits que nous avons exposés dans le chapitre 3.22.4 correspondent 3 modèles mathématiques d'Eléments finis différents :

- le modèle déplacement correspondant au principe de l'énergie potentielle minimum
- Le modèle équilibre (Méthode des Contraintes) correspondant au principe de l'énergie complémentaire minimum.
- le modèle mixte correspondant au principe de Reissner.

5.15.1 Modèle Déplacement

C'est le modèle simple que nous avons exposé précédemment. En introduisant la notion de coordonnées généralisées $|17|$, que nous avons utilisé implicitement, nous obtenons :

$$\{\delta\}_e = |C| |\alpha|$$

$|C|$ étant les déplacements généralisés exprimés dans la base $|\alpha|$
La matrice raideur élémentaire s'écrit alors :

$$|k|_e = |\alpha^{-1}|^T \left(\int_V |C|^T |D| |C| dv \right) |\alpha^{-1}|$$

expression analogue à ce que nous avons exposé précédemment avec

$$|B| = |C| |\alpha^{-1}|$$

5.15.2 Modèle équilibre

Pour le modèle équilibre, la mise en oeuvre est plus compliquée, le processus serait le suivant :

- le découpage en éléments reste inchangé
- considérons un champ de contraintes en équilibre défini par ses composantes généralisées $\{\beta\}$ dans une base $\{S\}$ tel qu'en un point M :

$$\sigma(i) = S_M \{\beta\}$$

Afin de respecter la continuité des contraintes, les charges généralisées élémentaires F_E sont choisies de telle sorte que suivant chaque surface de connexion, la distribution de contraintes soit définie de façon unique par les charges généralisées et réciproquement.

La complexité de la méthode provient de la définition des déplacements généralisés.

5.15.3 Modèle mixte

L'analyse élémentaire est faite au moyen du théorème de l'énergie complémentaire.

Les déplacements généralisés au sommet d'un élément sont déterminés en écrivant que les déplacements réels sur les bords de l'élément s'expriment en fonction de ces déplacements généralisés par une relation de la forme :

$$\{\delta\}_r = [C]_r \{\delta\}_e$$

$\{\delta\}_e$: déplacements généralisés au sommet

$\{\delta\}_r$: déplacements réels sur les bords

On définit les forces généralisées en écrivant que leur travail est égal au travail des contraintes sur les bords.

Pour ce modèle l'équilibre parfait n'est pas réalisé sur la frontière.

5.15.4 Limites supérieure et inférieure des déformations (*)

Ces limites découlent de l'application des 2 principes variationnels extrêmes : énergie potentielle minimum et énergie complémentaire minimum.

Considérons 1 corps soumis à 1 seule charge extérieure P. Soit u le déplacement supposé petit de son point d'application.

(*) : Réf : |12|, |14|, |37|, |38|, |39|, |16|

Soit $\pi_0 = (U_i)_0 + (U_e)_0$ la valeur du potentiel initial du corps non déformé. Ces valeurs devenant π , U_i , U_e après déformation.

Nous avons :

$$U_i - (U_i)_0 = U_i = \frac{1}{2} P_u \quad ((U_i)_0 = 0)$$

$$(U_e)_0 - U_e = P_u$$

$$\pi_0 - \pi = ((U_i)_0 - U_i) + ((U_e)_0 - U_e) = \frac{1}{2} P_u$$

De même l'énergie complémentaire devient :

$$U_i^* = U_i = \frac{1}{2} P_u$$

Considérons un champ de déformation u' compatible et pour lequel le potentiel total serait π' , pour la position d'équilibre, π prend sa valeur minimale donc :

$$\pi_0 - \pi > \pi_0 - \pi'$$

$$\text{d'où} \quad u = 2 \frac{\pi_0 - \pi}{P} > 2 \frac{\pi_0 - \pi'}{P} = u'$$

Par contre, considérons un champ de contrainte admissible pour lequel l'énergie complémentaire serait U_i^* ,

A l'équilibre U_i^* prend sa valeur minimale, donc :

$$U_i^* < U_i'^*$$

$$\text{soit} \quad u = \frac{2U_i^*}{P} < \frac{2U_i'^*}{P} = u''$$

D'où en conclusion :

$$u' < u < u''$$

que l'on peut écrire en appelant :

F et Δ : les charges et déplacements généralisés associés

e et a : les indices des valeurs exactes et approchées

$\bar{F}$ et $\bar{\Delta}$: les valeurs imposées

$$\frac{\Delta_a}{\bar{F}} < \frac{\Delta_e}{\bar{F}} \quad \text{théorème de l'énergie potentielle minimum}$$

$$\frac{\bar{\Delta}}{F_a} > \frac{\bar{\Delta}}{F_e} \quad \text{théorème de l'énergie complémentaire minimum.}$$

Donc le modèle déplacement fournit un minorant aux coefficients d'influence qui sont majorés par le modèle équilibre.

Donc pour pouvoir dans tous les cas connaître l'erreur commise il serait nécessaire de faire deux calculs différents :

- le premier en adoptant le modèle déplacement
- le second en adoptant le modèle équilibre.

Pratiquement, nous ne ferons qu'un seul calcul en adoptant le modèle déplacement, les résultats obtenus étant satisfaisants dans la plupart des cas.

5.15.5 Etude mathématique de l'erreur

De nombreux auteurs (*) ont cherché à calculer l'erreur mathématique commise en adoptant la méthode des Eléments Finis.

Mais cette estimation est extrêmement complexe, l'étude consistant à mettre en évidence les différents paramètres qui influent sur la convergence.

L'expression mathématique la plus simple est donnée par ZLAMAL [30] . Il utilise :

- θ le plus petit angle des triangles
- h la plus grande hauteur des triangles.

Dans ces conditions, pour une fonction du second degré, la distance au sens de l'énergie, D , entre le champ réel u_r et le champ calculé u_c , est majorée :

$$D(u_c - u_r) < K \frac{h^2}{\sin \theta}$$

K étant indépendant du maillage.

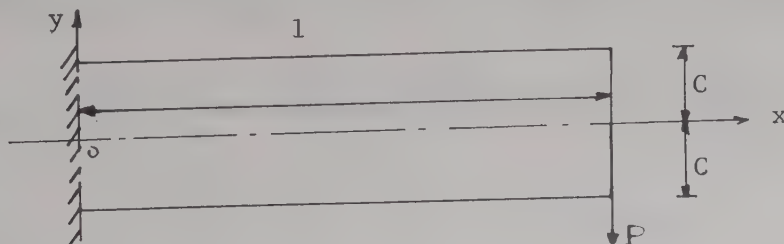
Pour des fonctions de degré supérieur, on obtient un majorant de la forme

$$K_n \frac{h^n}{\sin \theta}$$

Dans l'étude pratique suivante, nous allons chercher à mettre en évidence l'influence de ces deux coefficients h et θ .

5.15.6 Etude pratique de la convergence

Pour conduire cette étude, nous considérons une poutre console chargée par une force P .



(*) : Réf : [40] , à [46]

La solution analytique donnée par la théorie de l'élasticité [6] , [47] , est pour les contraintes :

$$\sigma_x = - \frac{P}{I} (1-x)y$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2I} (C^2 - y^2)$$

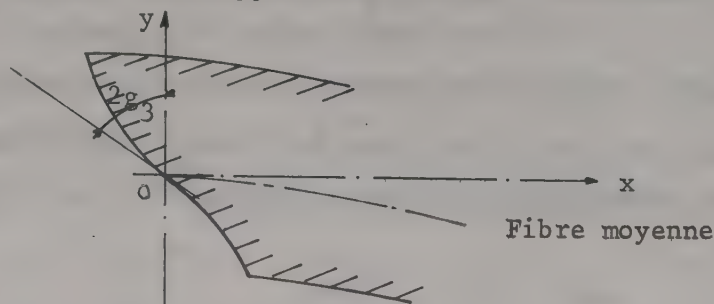
et les déplacements :

$$u = \frac{P}{2EI} \left[(21-x) xy + (2+\nu) \frac{y^3}{3} - (1+\nu) C^2 y + Ky \right]$$

$$v = - \frac{P}{2EI} \left[\nu(1-x) y^2 + \left(1 - \frac{x}{3}\right) x^2 + (1-\nu) C^2 x + Kx \right]$$

K étant une constante dépendant de l'encastrement.

a) Valeur de K en supposant un élément de l'axe fixé en 0



on obtient : $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ pour $x = y = 0$

$$\text{soit } K = -(1+\nu) C^2$$

L'équation de la courbe de flexion de la fibre moyenne s'écrit :

$$v(x,0) = - \frac{P}{2EI} \left(1 - \frac{x}{3}\right) x^2$$

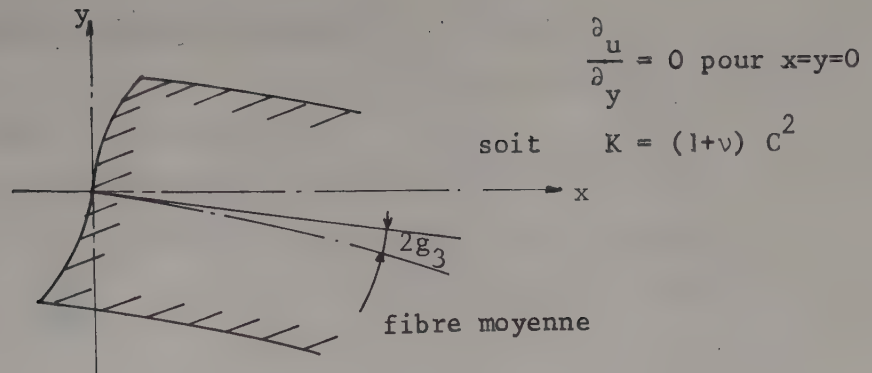
et la flèche maximale :

$$v_1(1,0) = - \frac{Pl^3}{3EI}$$

Résultats analogues à ceux de la théorie classique des poutres.

b) valeur de K, un élément vertical de la section transversale fixé en 0

On doit avoir



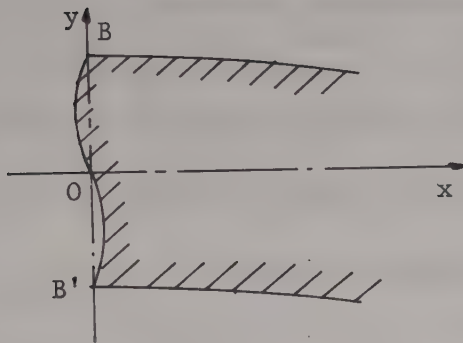
L'équation de la courbe de flexion de la fibre moyenne s'écrit :

$$v(x,0) = \frac{P}{2EI} \left[\left(1 - \frac{x}{3}\right) x^2 + 2(1+v) C^2 x \right]$$

et la flèche maximale :

$$v_2(1,0) = - \frac{Pl^3}{3EI} - \frac{3(1+v)}{2E} \frac{Pl}{C}$$

c) valeur de K en considérant l'encastrement suivant :



B, O, B' ne peuvent se déplacer parallèlement à O_x.

Dans ces conditions

$$u(0, \pm C) = 0$$

$$\text{Soit } K = \frac{1 + 2v}{3} C^2$$

et la flèche maximale est :

$$v_3(1,0) = - \frac{Pl^3}{3EI} - \frac{4 + 5v}{4E} \frac{Pl}{C}$$

Une première étude de convergence est faite en considérant une plaque de dimensions :

$$l = 50 \text{ mm}$$

$$2c = 5 \text{ mm}$$

$$b = 1 \text{ mm}$$

Poutre P1

soumise à une force $P = 10 \text{ kg}$.

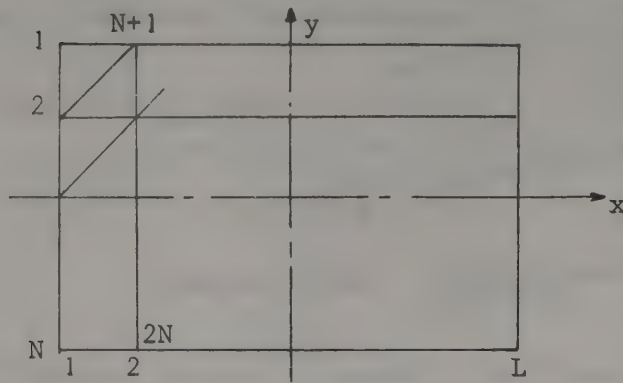
Dans ces conditions, on peut considérer que la théorie classique des poutres peut s'appliquer, en effet les flèches théoriques ont les valeurs suivantes :

$$v_1 = 2,00 \text{ mm}$$

$$v_2 = 2,02 \text{ mm}$$

$$v_3 = 2,014 \text{ mm}$$

Nous adoptons un découpage en éléments égaux



N = nombre de noeuds sur
une ligne de noeuds

L = nombre de lignes de
noeuds

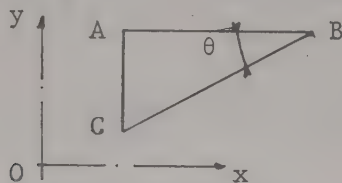
NEL = nombre d'éléments.

Nous obtenons :

NEL	40	90	160	250	360
N - L	3 - 11	4 - 16	5 - 21	6 - 26	7 - 31
v calculée	0,752	1,21	1,78	2,27	5,55
α %	62,40	39,5	11	-13,5	-177,5

avec α écart entre la flèche théorique v_3 et la flèche calculée v.

L'élément triangulaire adopté étant du type :



$$AB = 2$$

$$AC = 1$$

$$\theta = 26^{\circ}30'$$

A ce stade de notre étude, nous pouvons penser que la faible valeur de θ peut expliquer cette divergence des résultats.

Aussi sur une plaque de dimensions :

$$l = 50 \text{ mm}$$

$$2c = 25 \text{ mm}$$

$$b = 1 \text{ mm}$$

Poutre P2

nous faisons une étude de convergence en cherchant l'influence de θ plus petit angle des éléments triangulaires.

Les flèches ont les valeurs suivantes :

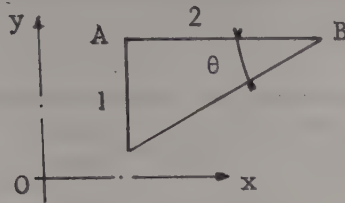
$$v_1 = 16 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad v_2 = 19,9 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad v_3 = 18,75 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Nous comparons les résultats obtenus à v_3 , l'encastrement correspondant se rapprochant le plus des conditions limites imposées dans notre étude (tous les noeuds de la section Oy sont immobilisés en x et y).

Nous avons fait 3 séries de Calculs :

1ère série de Calculs - Découpage P2-1

L'élément triangulaire adopté est du type :



$$\begin{aligned} AB &= 2 \\ AC &= 1 \end{aligned} \quad \text{soit } \theta = 26^{\circ}30'$$

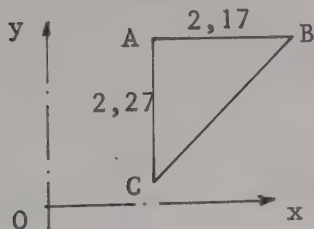
donc semblable à ceux de l'étude précédente.

Nous obtenons :

NEL :	18	32	50	72	98	128	162	200	308
N-L :	4-4	5-5	6-6	7-7	8-8	9-9	10-10	11-11	12-12
$v \times 10^3$:	11,30	13,51	14,96	15,91	16,58	17,05	17,40	17,68	17,91
α % :	39,9	26,93	20,19	15,14	11,57	9,06	7,2	5,7	4,48

2ème Série de Calculs - Découpage P2-2

L'élément triangulaire adopté est du type :

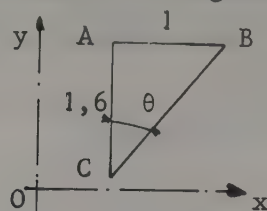


$$AB \approx AC \approx 1 \quad \text{soit } \theta \approx 45^{\circ}$$

NEL :	42	72	110	156	210	272	342	420	506
N-L :	4-8	50-7	6-12	7-14	8-16	9-18	10-20	11-22	12-24
$v \times 10^3$:	14,32	15,84	16,73	17,27	17,62	17,85	18,01	18,13	18,19
% :	23,6	15,51	10,76	7,89	6,02	4,8	4,00	3,30	2,98

3ème série de Calculs. - Découpage P2-3

L'élément triangulaire adopté est du type



$$L = 1 \quad \theta \approx 31^\circ$$

$$A = 1,6$$

NEL	66	112	170	24	322	416
N-L	4-12	5-15	6-18	7-21	8-24	9-27
$v \times 10^3$	14,87	16,48	17,04	17,49	17,78	17,97
$\alpha \%$	20,7	12,1	9,1	6,7	5,2	4,15

La figure 51-1 montre les variations de la flèche maximum v en fonction du nombre d'éléments.

D'après les 2 études précédentes, l'élanement $l/2c$ semble avoir une grande importance sur la précision des résultats.

Nous étudions donc 2 autres poutres de hauteurs différentes :

- Poutre de dimensions

$$l = 50 \text{ mm}$$

$$2c = 10 \text{ mm}$$

Poutre P3

$$b = 1 \text{ mm}$$

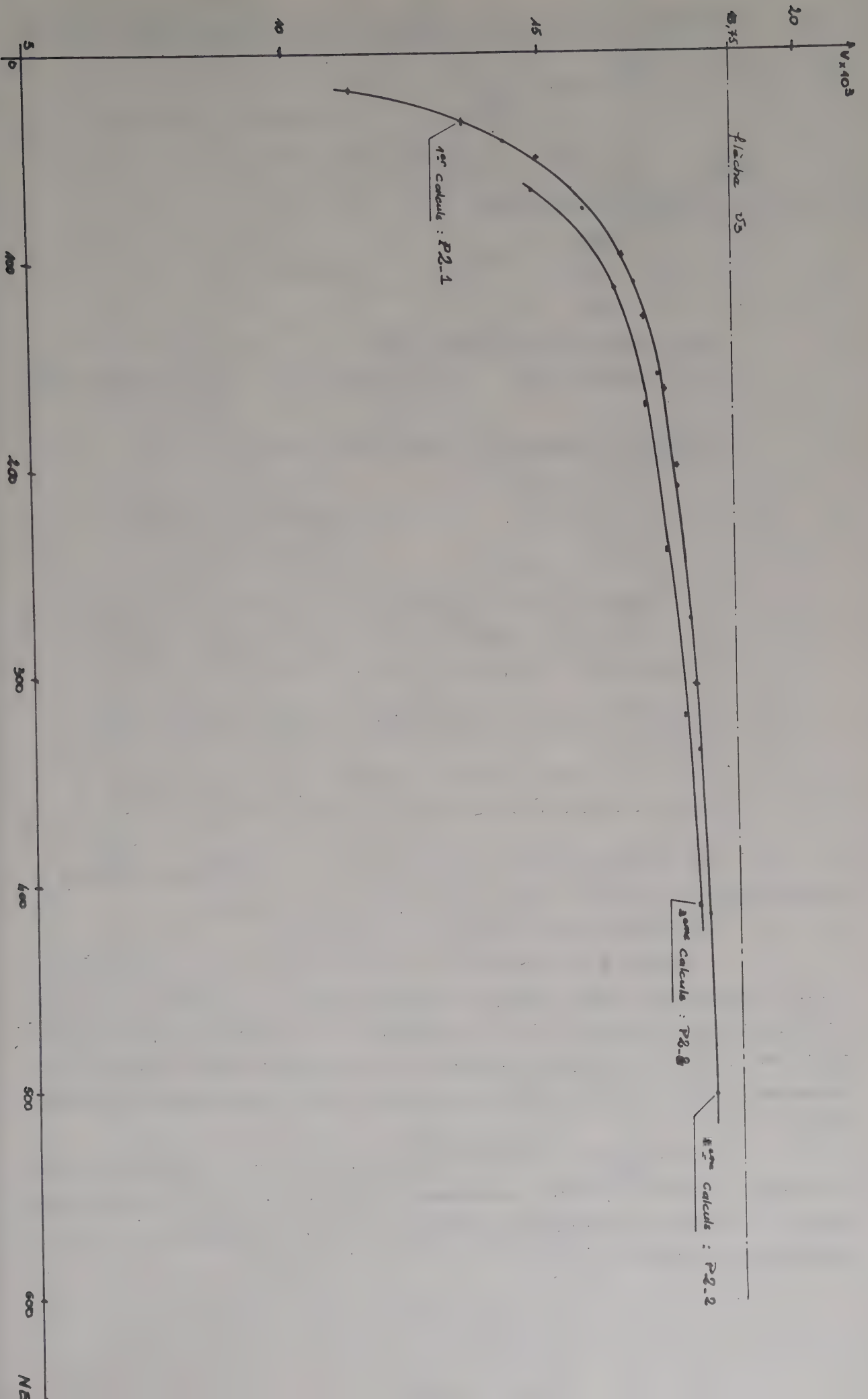
Les flèches correspondantes sont :

$$v_1 = 250 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad v_2 = 259,75 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad v_3 = 256,67 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

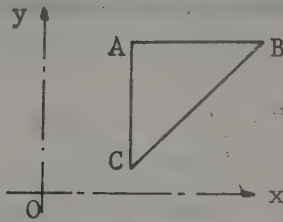
Ici également nous comparons la flèche v calculée à v_3 .

Nous obtenons :

NEL	90	160	250	360	490	640
N-L	4-16	5-21	6-26	7-31	8-36	9-41
$v \times 10^3$	18,5	20,9	22,2	22,6	22,6	22,1
$\alpha \%$	27,89	18,56	13,70	11,94	11,94	13,89



L'élément triangulaire adopté pour le découpage étant du type :



$$AB = AC = 1 \quad \theta = 45^\circ$$

- Poutre de dimensions

$$l = 50 \text{ mm}$$

$$2c = 7 \text{ mm}$$

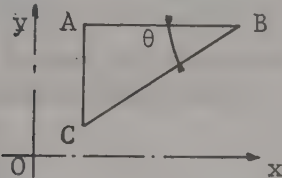
$$b = 1 \text{ mm}$$

Poutre P4

Les flèches correspondantes sont :

$$v_1 = 728,03 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad v_2 = 741,96 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad v_3 = 737,85 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

L'élément triangulaire adopté est du type :



$$AB = 3,33$$

$$AC = 2,33$$

$$\theta = 35^\circ$$

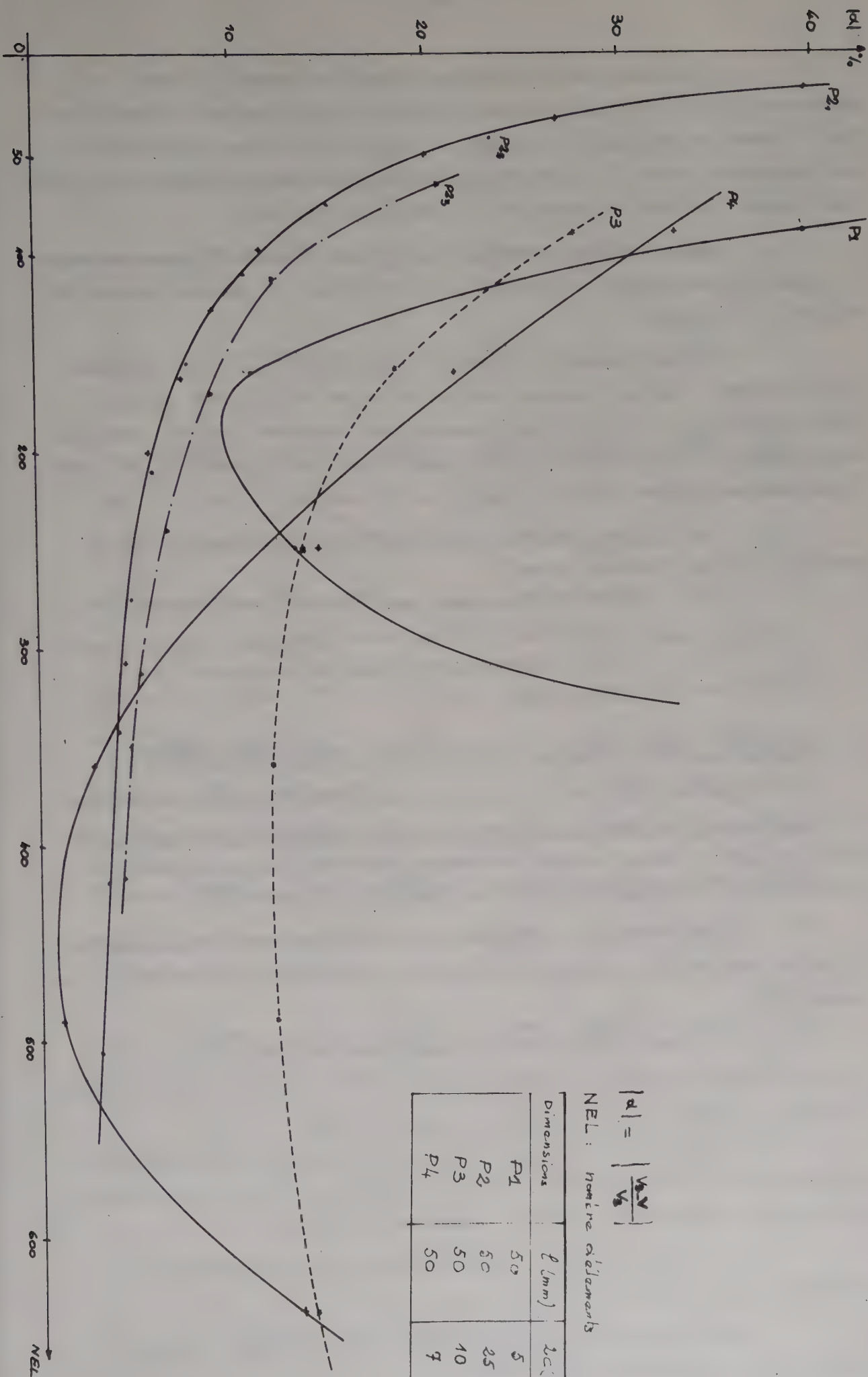
NEL :	90	160	250	360	490	640	:
N-L :	4-16	5-21	6-26	7-31	8-36	9-41	:
:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:
$v \times 10^2$:	49,43	57,96	63,22	71,76	73,00	83,47	:
:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:
α % :	33,03	21,47	14,33	2,75	1,07	13,13	:
:	:	:	:	:	:	:	:

Sur la figure (51-2) nous avons porté les différentes courbes de variations de $|\alpha|$ pour les différentes poutre P1, P2, P3, P4.

Nous pouvons tirer plusieurs conclusions :

- L'angle θ des triangles intervient surtout en fonction du gradient de contrainte. Cette remarque est faite après les 3 calculs de la poutre P2, puisque le premier type de découpage avec des triangles très allongés donne des résultats légèrement meilleurs que ceux du deuxième type avec des triangles réguliers. La précision du troisième type de découpage étant moins bonne.

- La divergence des résultats de la poutre P1 n'est donc pas due à l'angle θ , cette divergence diminuant lorsque la hauteur de la poutre augmente ; la courbe de convergence de la poutre P3 étant régulière, bien que la précision soit médiocre.



$$|\alpha| = \left| \frac{u_N}{v_N} \right|$$

NEL: native elements

Dimensions	l (mm)	$2c$ (mm)
P1	50	5
P2	50	25
P3	50	10
P4	50	9

L'élancement de la structure a donc une grande influence sur la précision de la méthode. Pour des structures très élancées (Poutre P1 et P4) l'élément triangulaire à 6 degrés de liberté n'est plus utilisable, il est nécessaire alors d'utiliser des fonctions déplacement de degré plus élevé (par exemple utiliser le triangle à 12 degrés de liberté).

- Dans le cas de structure peu élancée (Poutre P2) pour un angle θ donné, la convergence est effective, un découpage fin donnant de bons résultats (3 % environ).

- En considérant la courbe de variation de $|\alpha|$ pour la poutre P3, on remarque que cette courbe croît à partir de 450 éléments environ. Cette croissance est due à l'erreur machine qui commence à devenir sensible. Cette erreur restant néanmoins faible puisque pour 640 éléments il doit être au maximum de l'ordre de 2 %.

- Donc notre programme permet d'obtenir de bons résultats si certaines précautions sont prises :

- étude de structures peu élancées avec l'élément triangulaire à 6 degrés de liberté.
- choix du découpage en fonction du gradient de contrainte.

5.2 - ETUDE DES MAJORATIONS DE CONTRAINTES DANS DES PLAQUES PERCEES -

Dans ce chapitre, nous nous proposons de déterminer les majorations de contraintes dans des plaques percées de différents orifices : cercles et ellipses. Ces structures présentant des symétries par rapport aux axes Ox et Oy , les études porteront sur les 1/4 de plaques.

Afin de justifier cette étude des 1/4 de plaques, nous donnons à titre d'exemple les résultats obtenus pour la structure représentée par la figure (52-1).

La figure (52-2) donne les variations des contraintes σ_x et σ_y suivant les axes Ox et Oy , ces résultats étant obtenus en étudiant la plaque entière.

L'étude du 1/4 de plaque est faite en adoptant le découpage de la figure (52-3). Les déplacements en x des noeuds de l'axe Oy étant nuls, ainsi que les déplacements en y des noeuds de l'axe Ox .

Sur la figure (52-4), nous avons porté les variations de la contrainte σ_y le long de l'axe Ox .

Nous obtenons des résultats identiques à 2 % près environ. Différence due à la précision des calculs.

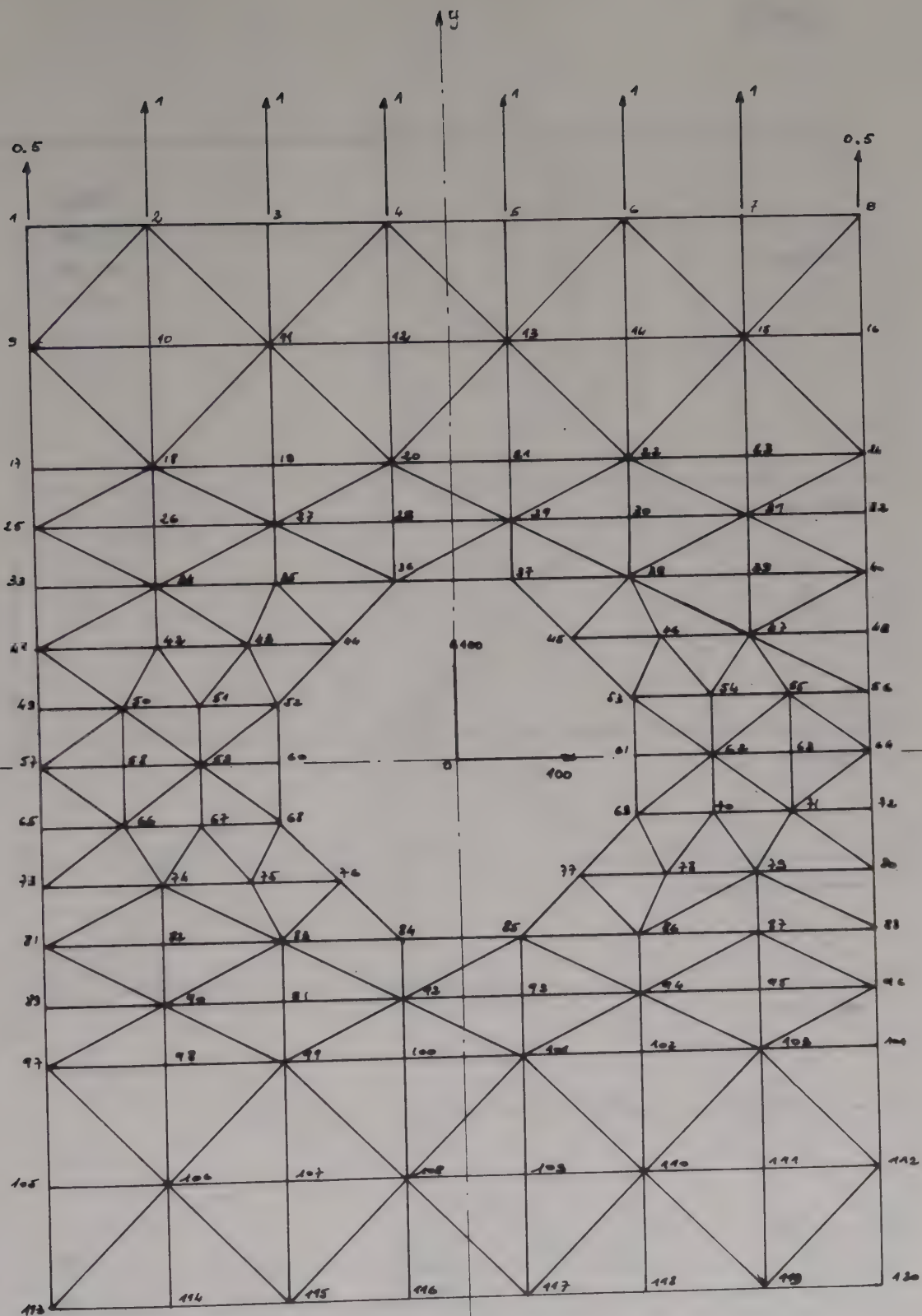


Fig. 52-1

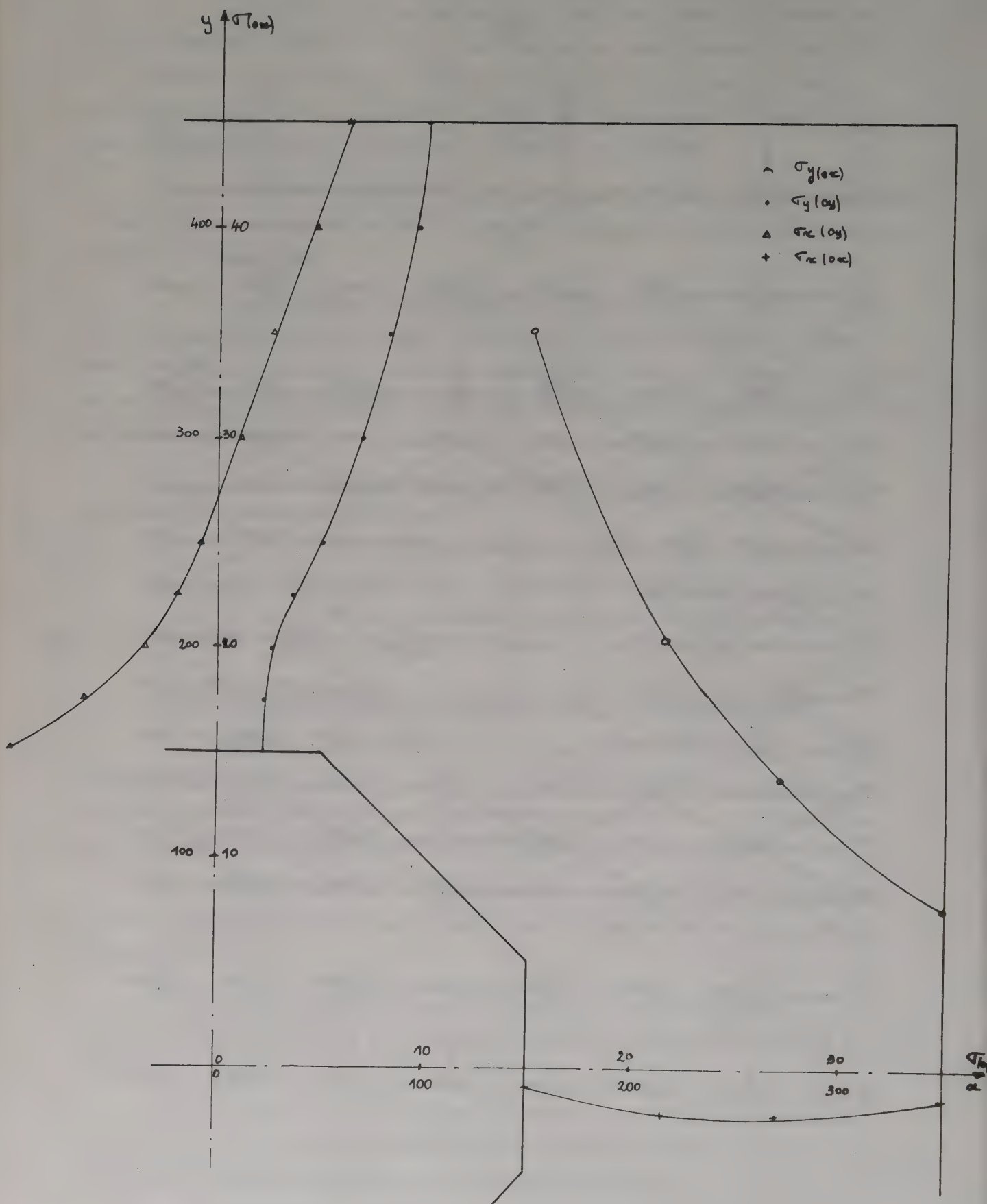


Fig. 52-2

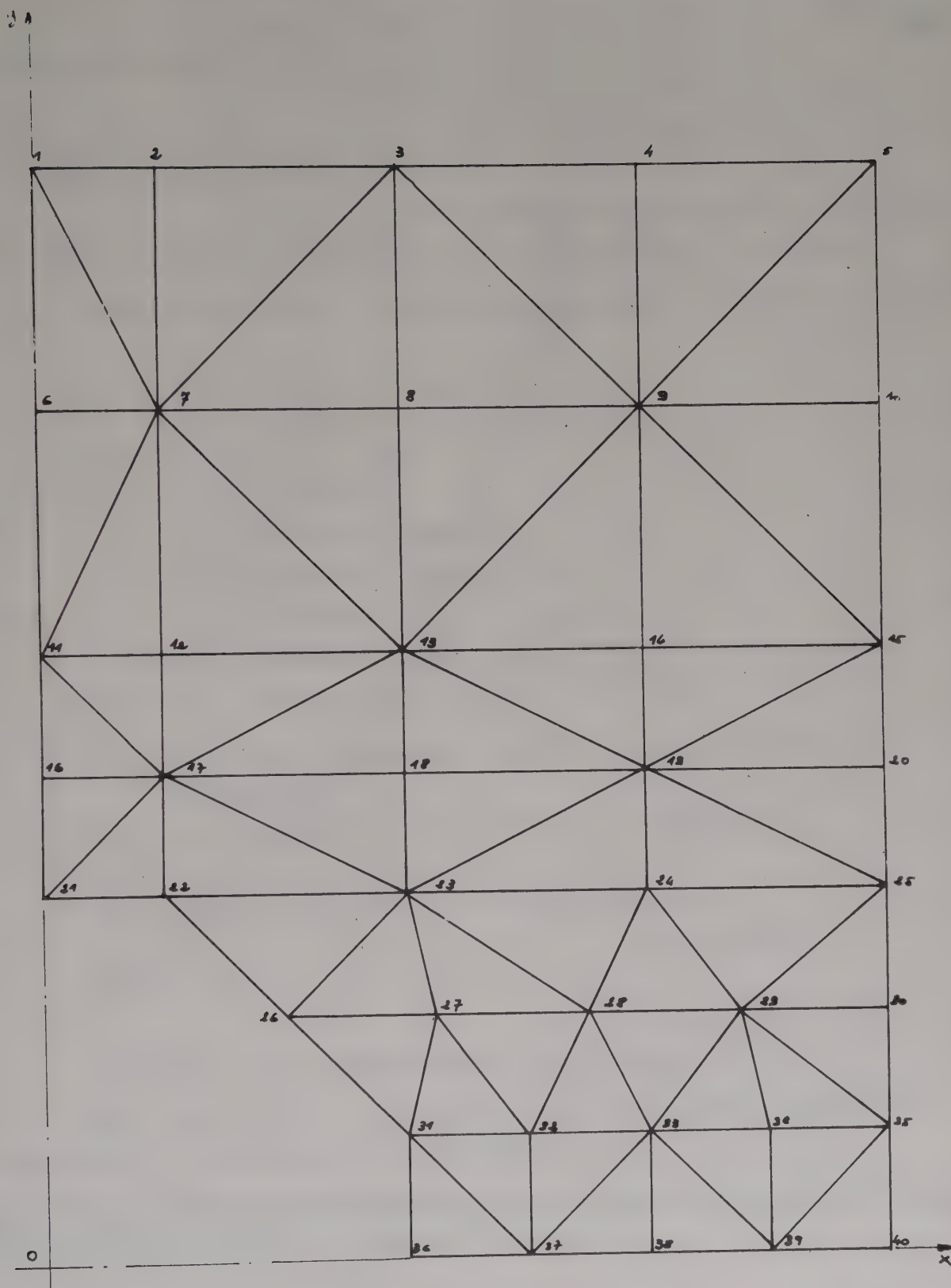


Fig. 52-3

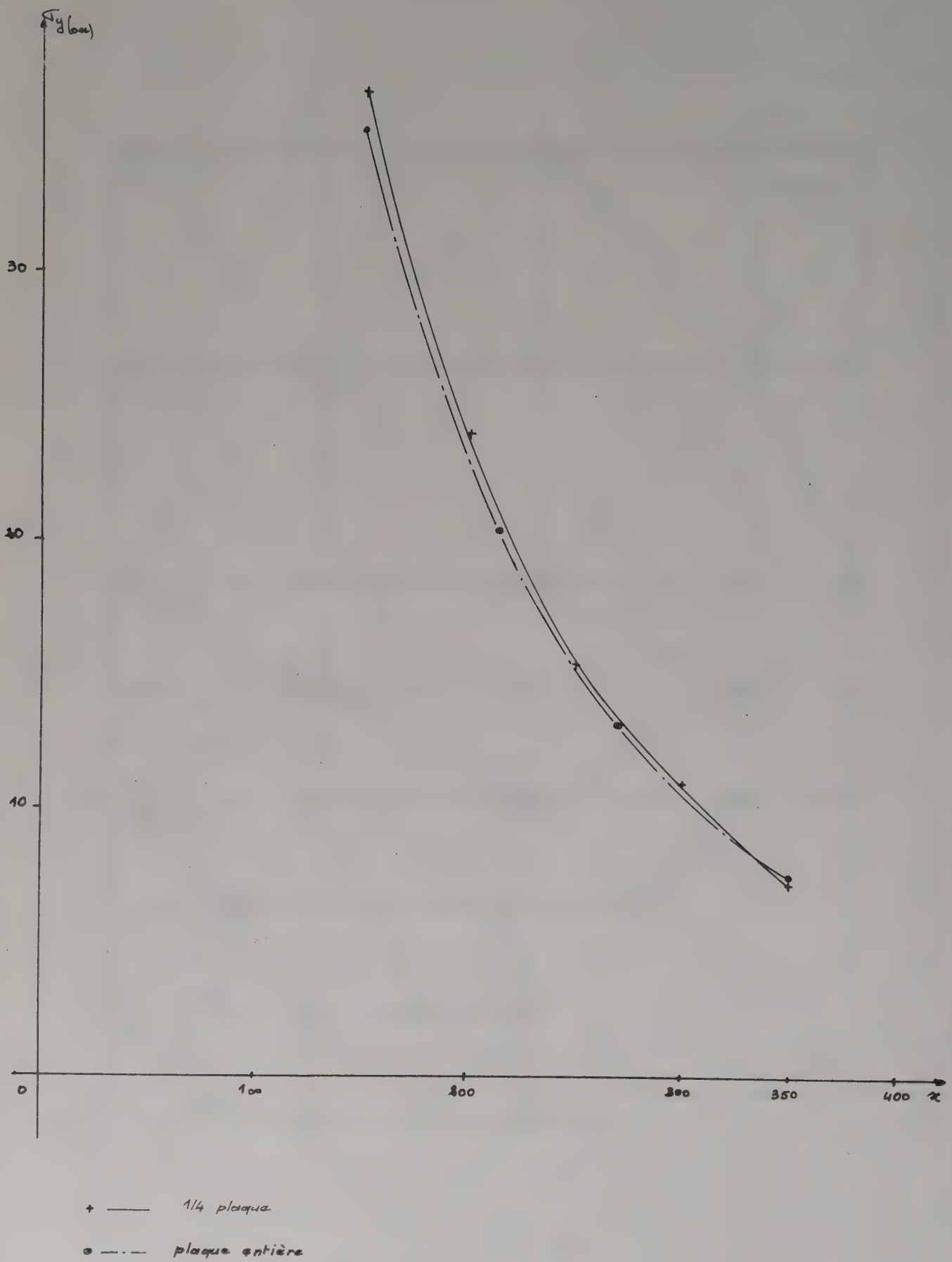


Fig. 52-4

5.2.1 Plaques percées de trous circulaires

Nous ferons 3 types d'études.

1 - Pour une plaque de dimensions données, nous chercherons l'influence du diamètre du trou sur les majorations de contraintes.

2 - Pour une plaque de largeur a donnée, percée d'un trou de diamètre $2R$ donné, nous chercherons l'influence de la longueur de la plaque sur les majorations de contraintes.

3 - Pour une plaque de dimensions données, nous chercherons l'influence de bossages et raidisseurs sur les majorations de contraintes.

Pour ces différentes études, nous adopterons les notations suivantes

2a : largeur de la plaque

2b : longueur

R : rayon du trou

e : épaisseur

σ_n : contrainte nominale

σ_y : contrainte y sur l'axe Ox

σ_x : contrainte x sur l'axe Oy

$(\sigma_y)_a$: contrainte y au bord du trou

$(\sigma_y)_b$: contrainte y au bord de la plaque

5.21.1 *Influence du diamètre du trou sur les majorations de contraintes*

Les plaques considérées sont de dimensions suivantes :

$a = 350$ mm $b = 450$ mm $e = 0,10$ mm

Le rayon du trou prenant les valeurs suivantes :

c2 : $R = 50$ mm c3 : $R = 100$ mm c4 : $R = 150$ mm

c5 : $R = 200$ mm c6 : $R = 250$ mm

Un exemple de découpage est montré sur la fig. 52-5.

Les figures (52-6a) et (52-6b) donnent les courbes de majoration de contraintes σ_y et σ_x pour les différentes plaques.

Nous avons d'autre part porté les variations théoriques de ces majorations pour une plaque de dimensions infinies.

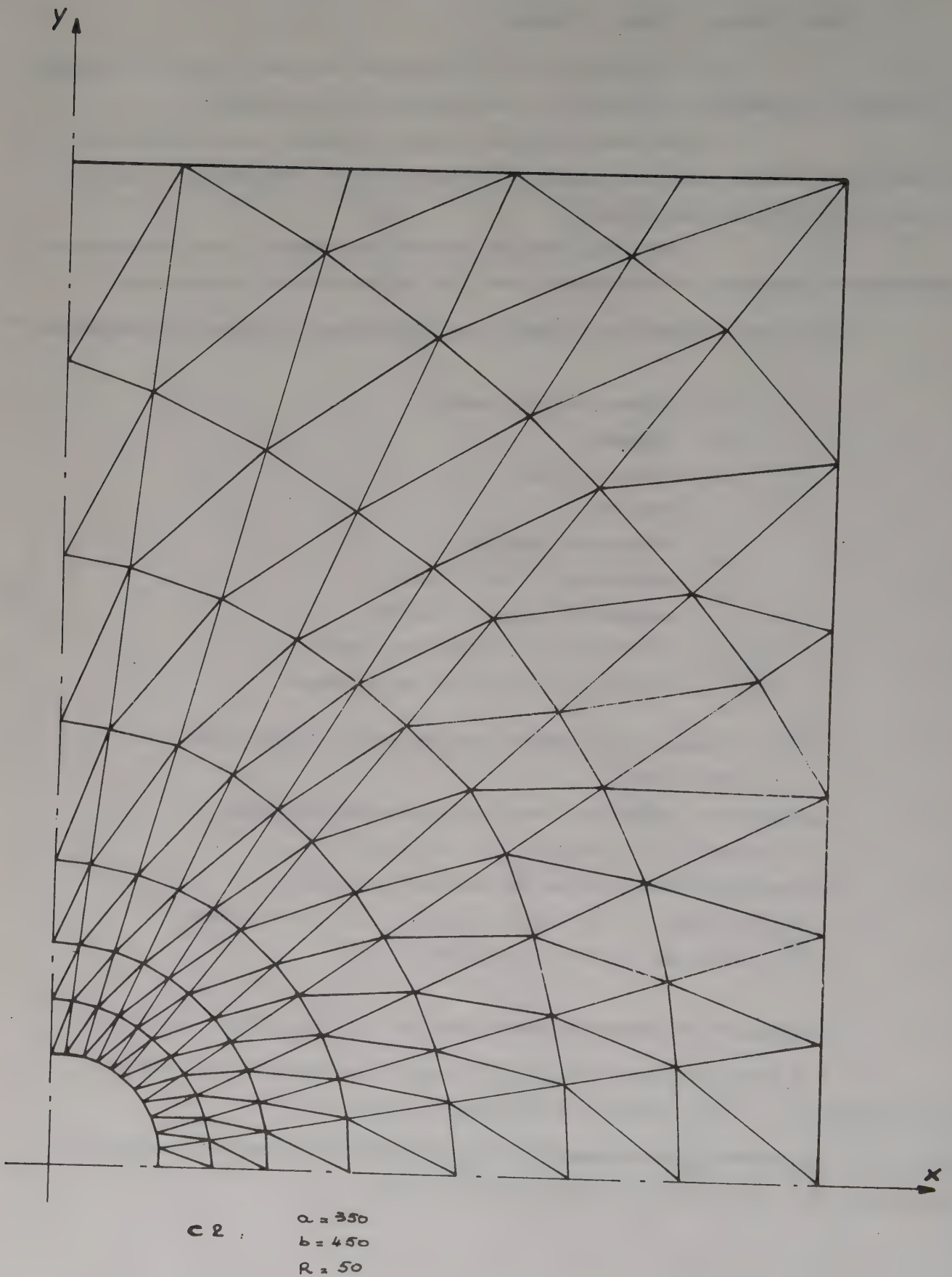
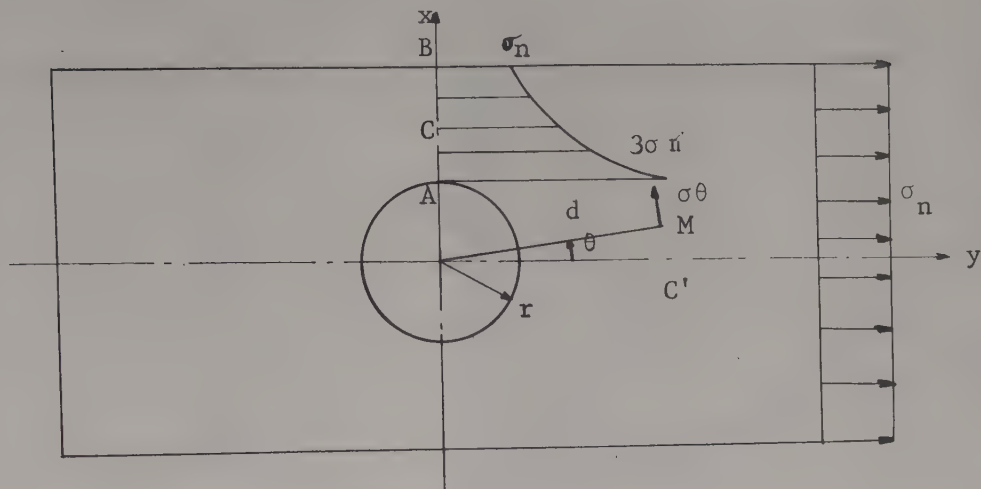


Fig. 52-5

Variations données par la formule générale

$$\sigma_{\theta}(M) = \frac{\sigma_n}{2} \left(1 + \frac{r^2}{d^2} \right) - \frac{\sigma_n}{2} \left(1 + \frac{3r^4}{d^4} \right) \cos 2\theta$$



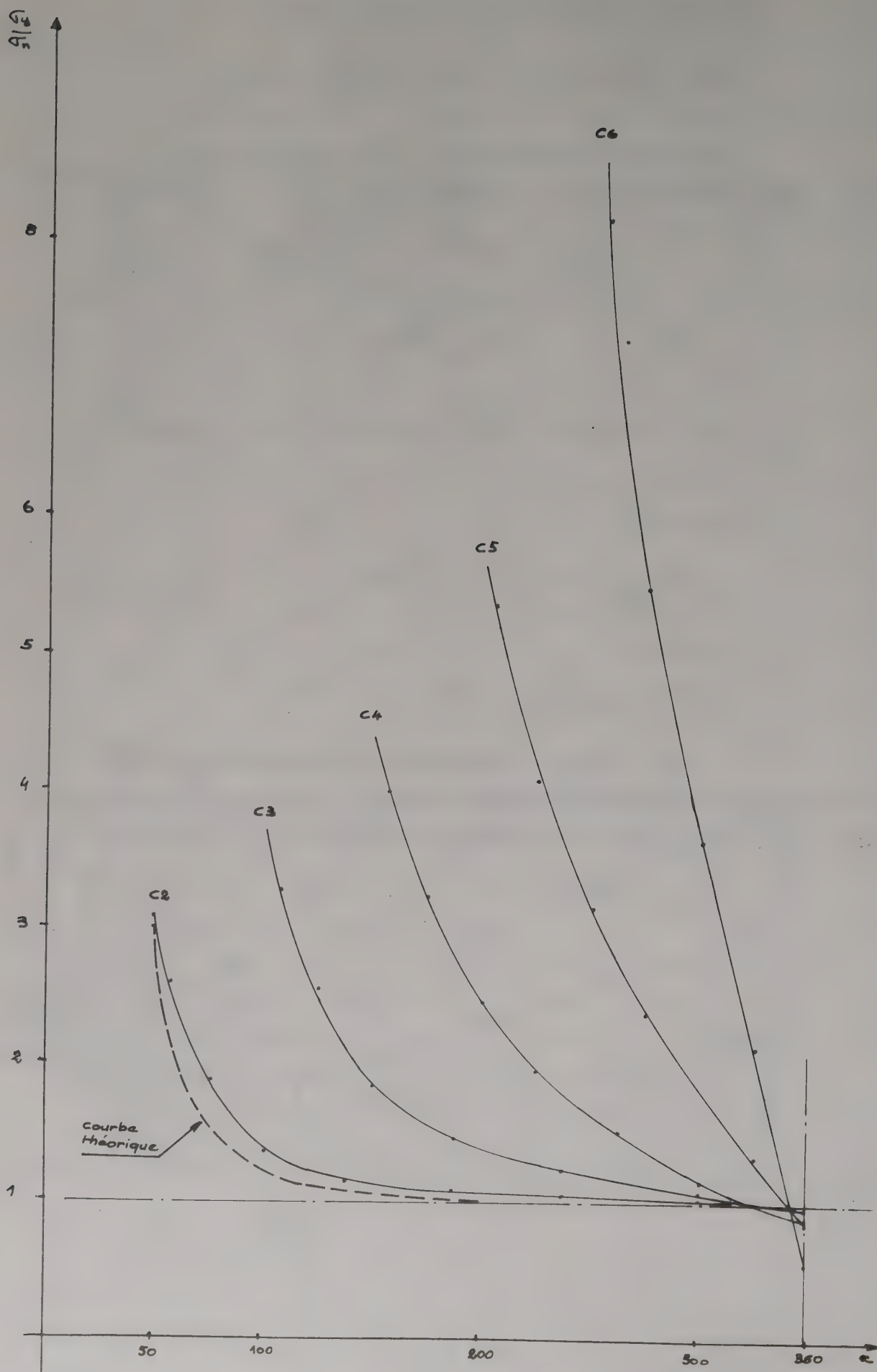
Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\sigma_y(c) = \sigma_n \left(1 + \frac{r^2}{2d^2} + \frac{3r^4}{2d^4} \right)$$

Pour $\theta = 0$

$$\sigma_x(c') = \sigma_n \frac{r^2}{2d^2} \left(1 - \frac{3r^2}{d^2} \right)$$

La courbe c2 donne pratiquement une majoration au bord du trou identique à la majoration théorique. Donc dans certains cas on pourra considérer que cette plaque est de dimensions infinies, c'est à dire pour $\frac{a}{R} > 7$.



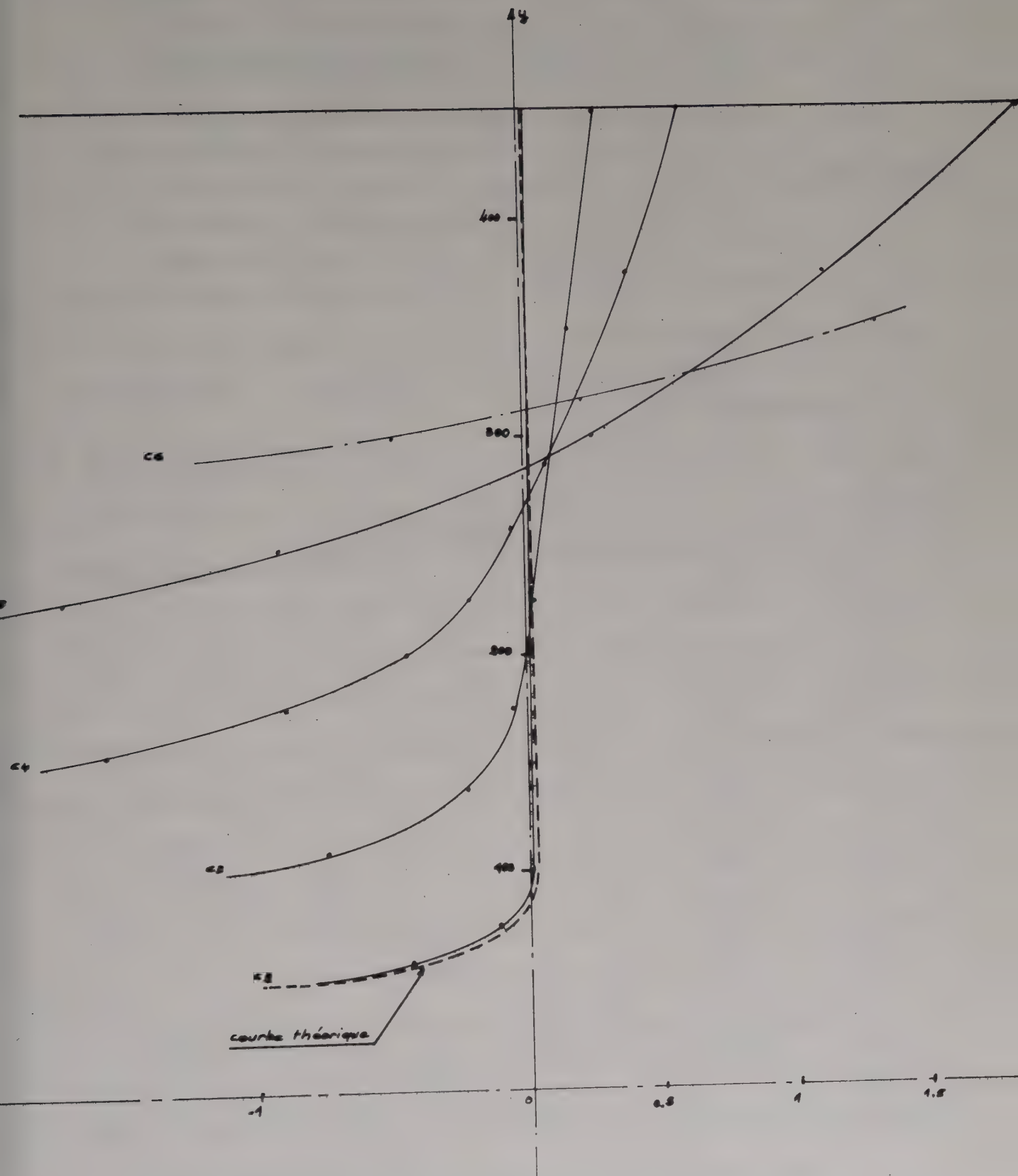


Fig. 52-6 b

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des coefficients de majoration de contraintes au bord du trou :

$$k_1 = \frac{(\sigma_y)_R}{\sigma_n} \quad k_2 = \frac{(\sigma_x)_R}{\sigma_n} \quad \text{en fonction du rapport } \lambda = \frac{R}{a}$$

Nous avons comparé les résultats obtenus par la méthode des éléments finis avec :

- d'une part les résultats théoriques de R.C.J. HOWLAND [48]
- d'autre part des résultats d'essais de photoélasticité effectués au Laboratoire de Résistance des Matériaux de l'ENSM.

λ	Eléments finis		R.C.J. HOWLAND		Labo. R.D.M.	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
0			3,00	- 1		
0,1			3,03	- 1,03		
0,143	3,10	- 1,06				
0,15					3,15	- 0,95
0,2	3,2	- 1,12	3,14	- 1,11	3,22	- 0,97
0,286	3,70	- 1,32				
0,3	3,80	- 1,38	3,36	- 1,26	3,60	- 1,12
0,4	4,30	- 1,76	3,74	- 1,44	3,99	- 1,35
0,428	4,50	- 1,90				
0,5	4,83	- 2,55	4,32	- 1,58	4,55	- 1,50
0,570	5,65	- 3,2				
0,6	6,17	- 3,44			5,63	- 1,61
0,715	8,8	- 5,6				
0,75					9,19	- 1,92

Ces différents résultats sont portés sur les figures 52-7 a et 52-7 b.

Les courbes de variation du rapport k_1 sont semblables, le décalage de ces 3 courbes s'expliquent de la manière suivante :

- Howland donne des résultats pour des plaques de longueur infinie.
- Les essais de photoélasticité réalisés au Laboratoire de R.D.M. sont faits sur des plaques dont le rapport $b/a = 2$.
- Pour notre étude par les éléments finis, ce rapport b/a est égal à $b/a = 9/7$.

La divergence des courbes de variations de k_2 est très importante.

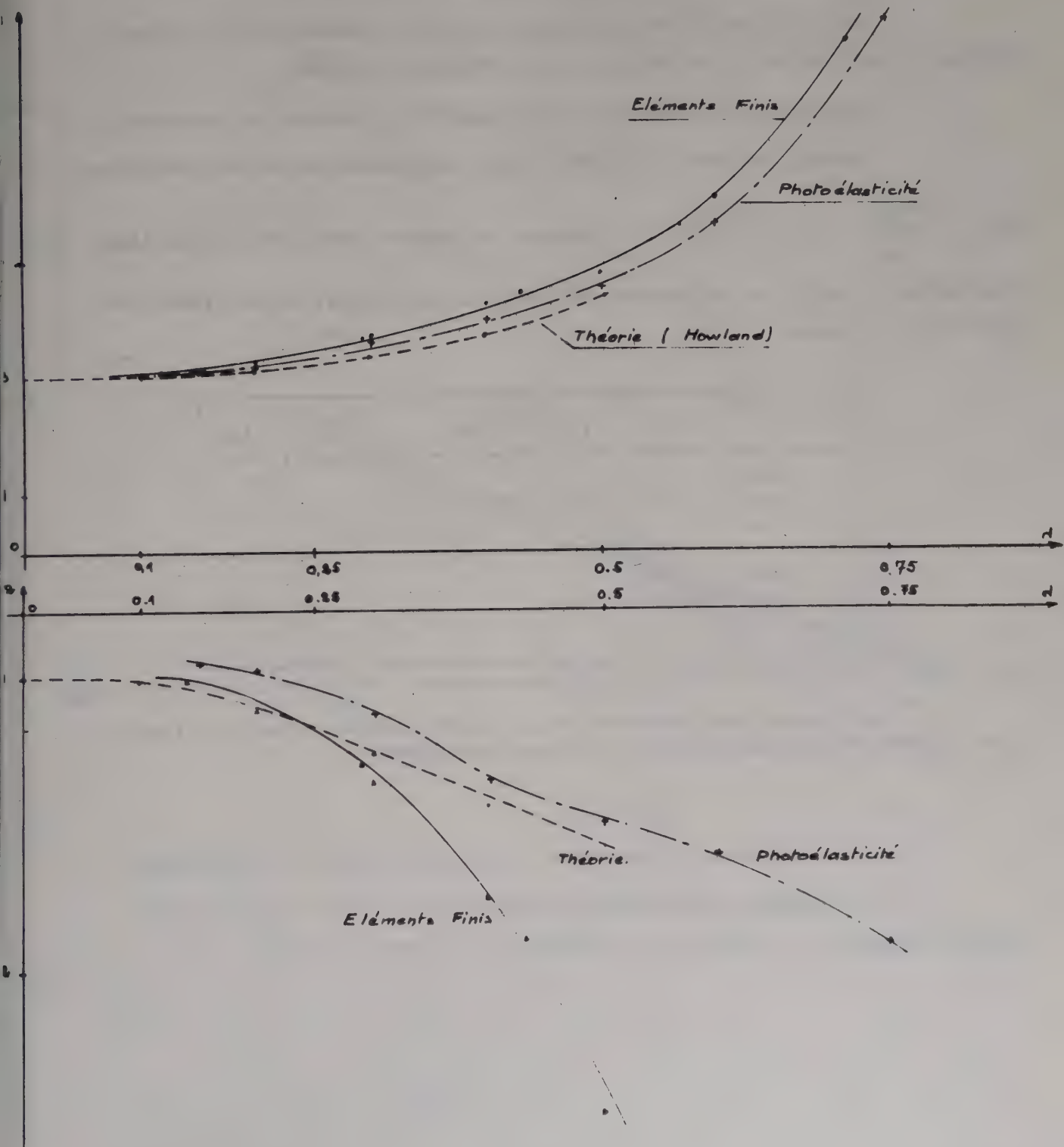


Fig. 57 a et b

5.21.2 Influence de la longueur de la plaque sur les majorations de la contraintes.

Pour cette étude nous considérons une plaque de largeur $2a$ fixe ($a = 350$ mm) percée d'un trou de rayon fixe ($R = 250$ mm).

Les calculs sont faits pour différentes longueurs de plaque :

$B_1 : b = 300$ mm $B_2 : b = 350$ mm $B_3 : b = 400$ mm
 $B_4 : b = 450$ mm $B_5 : b = 500$ mm $B_6 : b = 550$ mm

Sur la figure (52-8) nous avons porté les variations de la contrainte σ_y le long de l'axe Ox pour les différentes plaques.

La figure (52-9) montre le déplacement du contour de la plaque B_5 .

D'autre part sur la figure (52-10) nous avons porté les variations

de $k_1 = \frac{(\sigma_y)_R}{\sigma_n}$ et $k_2 = \frac{(\sigma_y)_b}{\sigma_n}$ en fonction du rapport b/R . Ces courbes étant construites à partir du tableau de résultats suivant établi en utilisant les courbes de la figure (52-8).

$b/R :$	$1,2$	$1,4$	$1,6$	$1,8$	2	$2,2$
$k_1 = \frac{(\sigma_y)_R}{\sigma_n}$	$21,8$	$15,4$	12	$8,8$	$8,1$	$7,9$
$k_2 = \frac{(\sigma_y)_b}{\sigma_n}$	$-5,5$	$-2,8$	-1	$0,2$	$0,6$	$0,8$

Ici encore dans certains cas, on pourra admettre que les plaques B_5 et B_6 sont de longueur infinie, soit pour un rapport

$$\frac{b}{R} > 2$$

5.21.3 Influence de bossages sur les majorations de contraintes

Nous étudions deux formes de bossage sur le 1/4 de plaque C4 de caractéristiques : $a = 350$ mm, $k = 450$ mm, $R = 150$ mm, $e = 0,1$ mm.

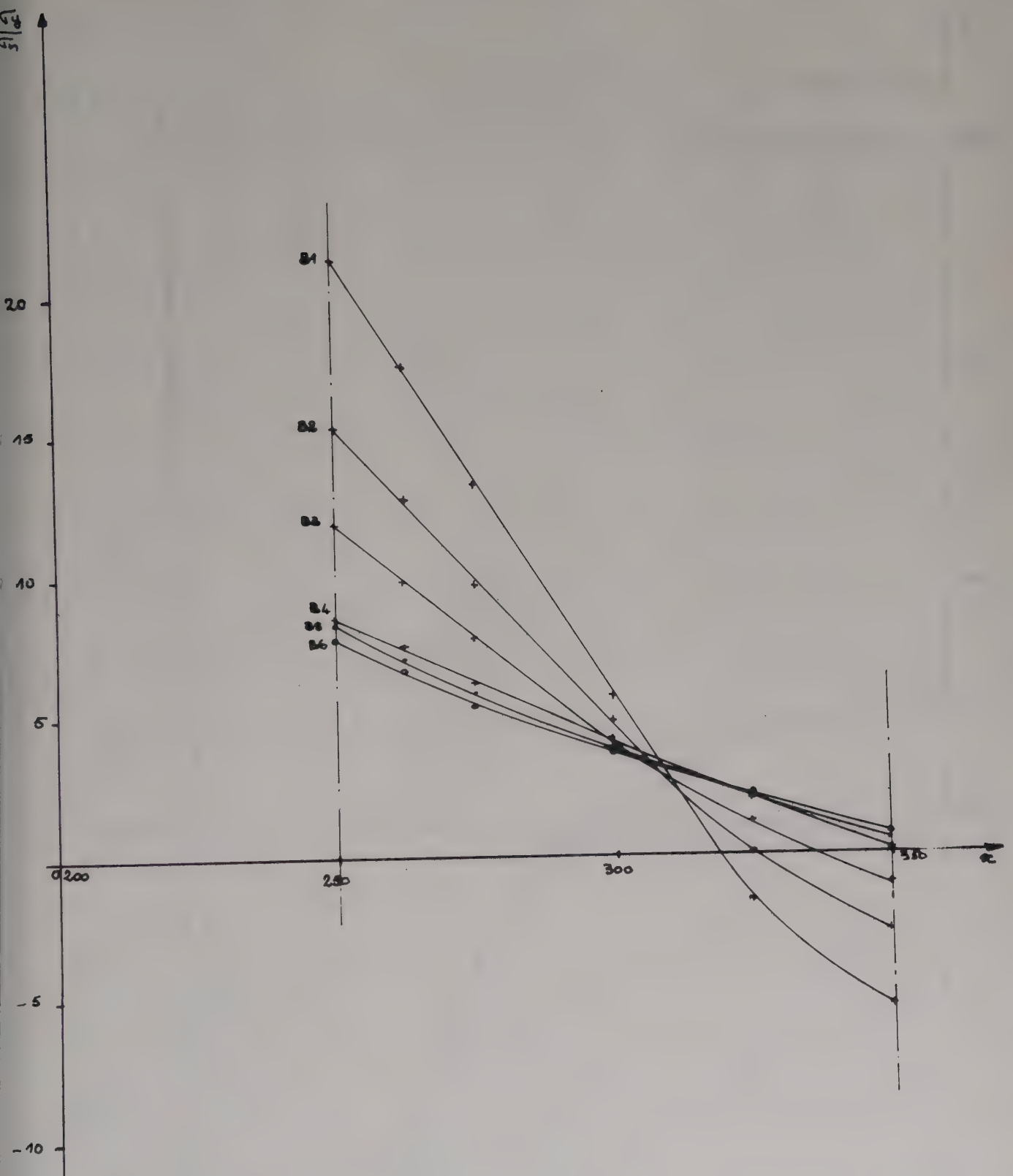


Fig. 52-8

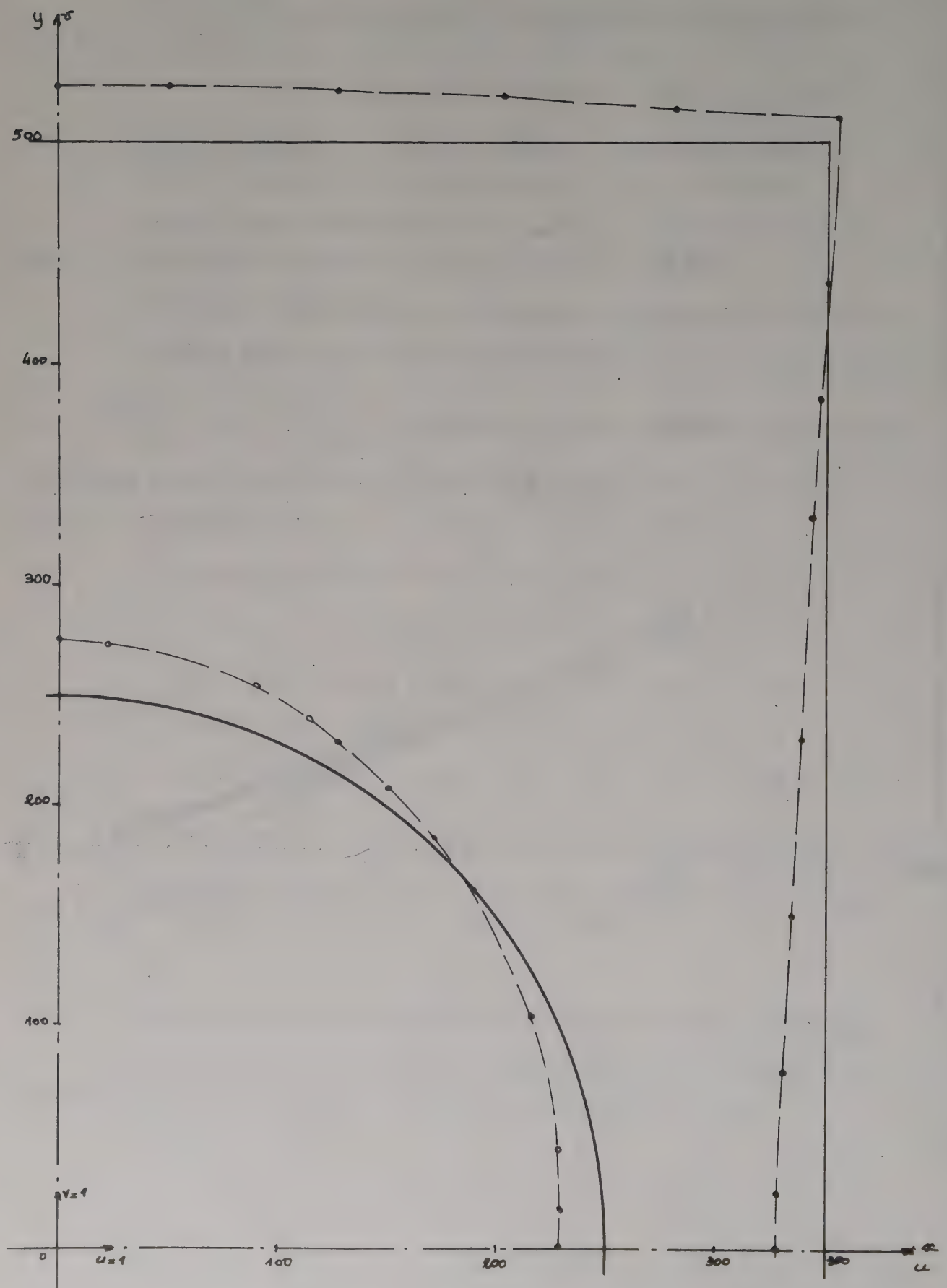


Fig. 52-9

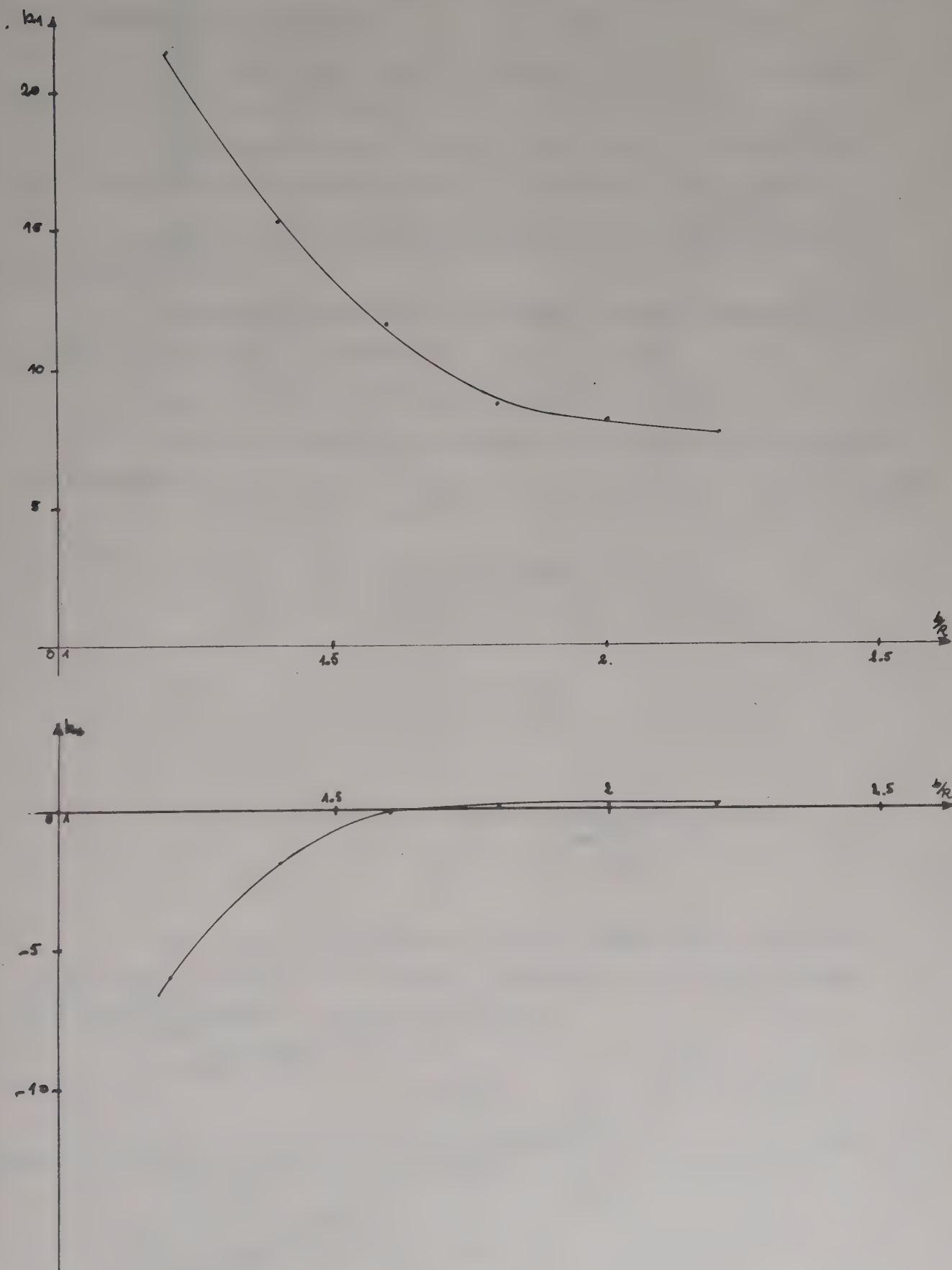
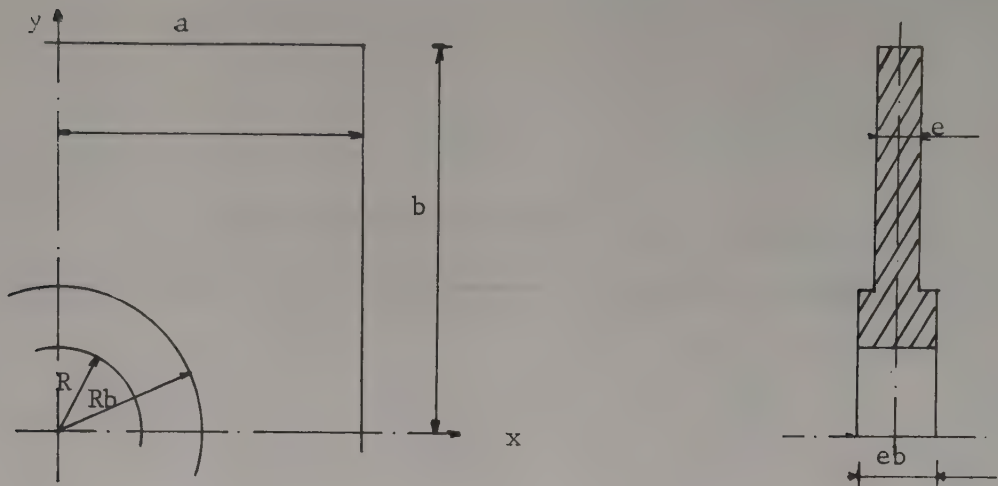


Fig. 52-10

Ces deux bossages sont de caractéristiques suivantes :

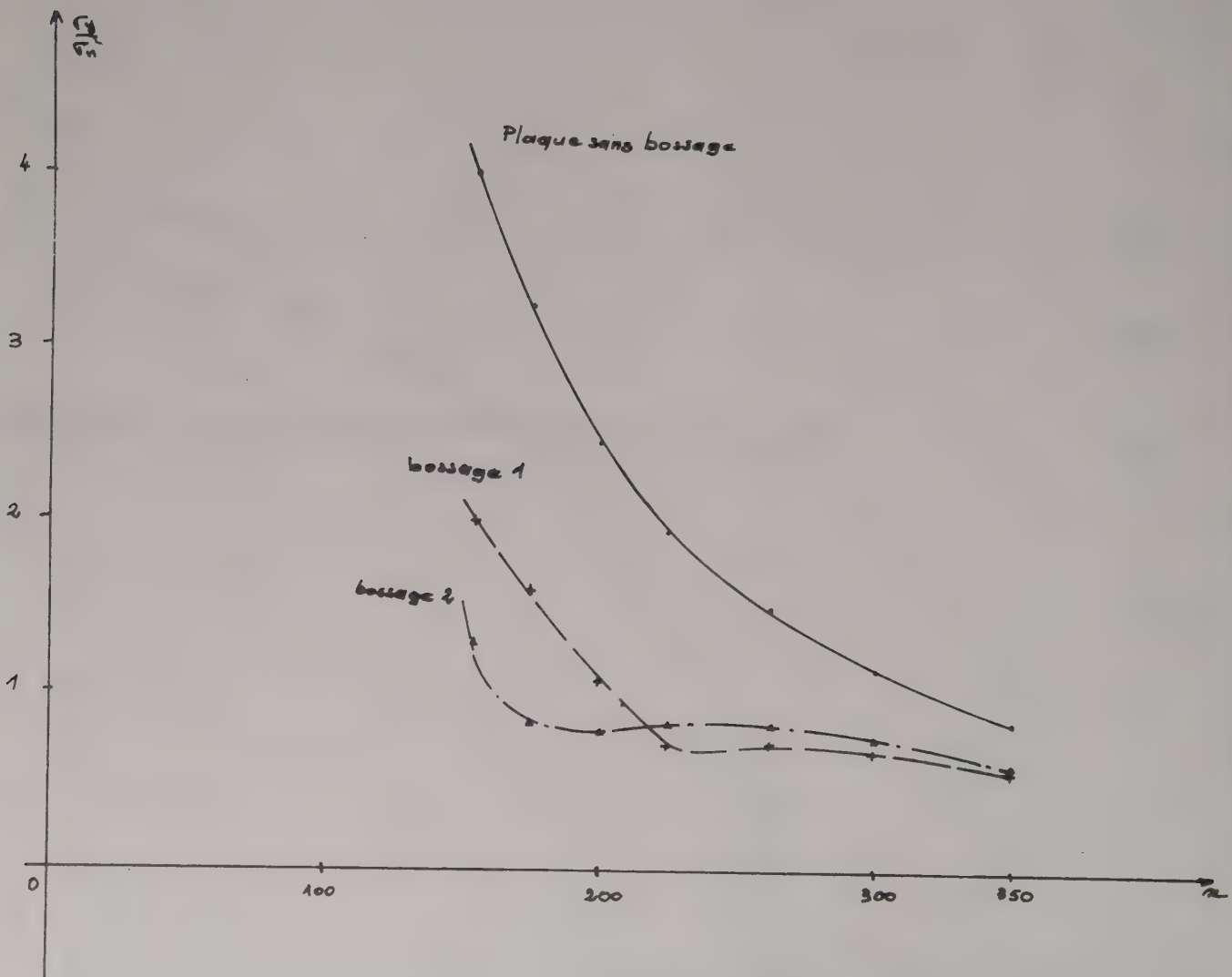


bossage 1 : $R_b = 225 \text{ mm}$

$e_b = 0,3 \text{ mm}$

Bossage 2 : $R_b = 175 \text{ mm}$

$e_b = 1 \text{ mm}$



5.21.4 Etude de l'influence d'un raidisseur sur la majoration de contraintes.

Pour de nombreuses études de structure, il est intéressant de pouvoir superposer des raidisseurs.

Nous nous proposons dans cette étude d'améliorer le programme initial pour que les raidisseurs puissent être pris en compte.

Les raidisseurs sont assimilés à des barres travaillant uniquement en traction et compression, donc sous l'effet de l'effort normal.

Ces barres sont superposées à la structure et sont articulées aux noeuds de celle-ci.

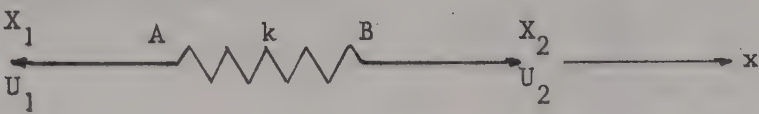
Le problème revient donc à calculer la matrice raideur d'une barre travaillant en traction ou compression.

Une telle barre peut être assimilée à un ressort.

Et dans ces conditions l'équation fondamentale reliant les forces aux déplacements,

$$|F| = |K| \cdot |\Delta|$$

s'écrira :

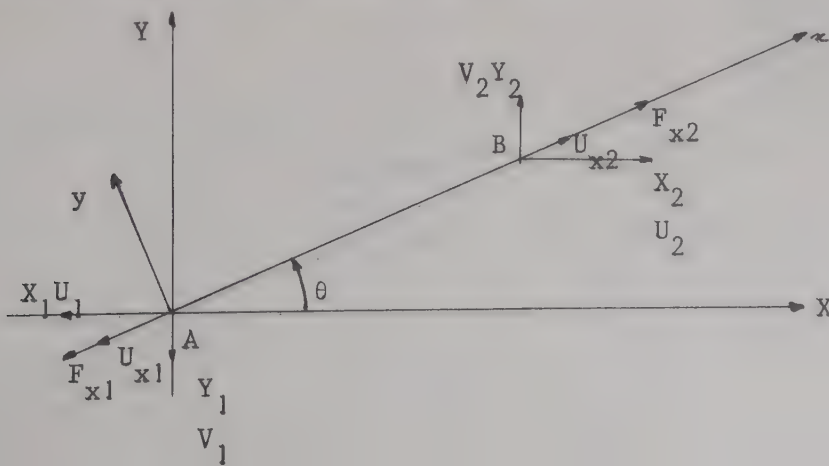


$$|F| = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad |K| = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad |\Delta| = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

La matrice raideur de la barre AB équivalente s'écrira

$$|K| = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } k = \frac{EI}{L}$$

Cette matrice $|K|$ calculée dans le système d'axe local doit en général être exprimée dans le système de référence. Il est donc nécessaire de calculer la matrice de transformation $|T|$,



Soit $F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}$ les composantes des forces et $u_{x1}, v_{y1}, u_{x2}, v_{y2}$ les composantes des déplacements dans le système local x, y .

La matrice raideur s'écrit

$$|K| = \frac{EI}{L} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Soit à calculer la matrice raideur $|R|$ permettant d'exprimer les composantes $X1, Y1, X2, Y2$ des forces en fonction des composantes $U1, V1, U2, V2$ des déplacements dans le système de référence X, Y .

Pour ce faire, il suffit d'exprimer les composantes de $|F|$, ($X1, Y1, X2, Y2$) en fonction des composantes de $|f|$, ($F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}$) et les composantes de $|\Delta|$, ($U1, V1, U2, V2$) en fonction des composantes de $|\delta|$, ($u_{x1}, v_{x1}, u_{x2}, v_{x2}$).

Nous avons les relations

$$\begin{aligned} |F| &= |T| |f| \\ |\Delta| &= |T| |\delta| \end{aligned} \quad |T| = \text{matrice transformation}$$

Calcul de $|T|$

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} U_1 &= u_{x1} \cos\theta + u_{y1} \sin\theta \\ V_1 &= u_{x1} \sin\theta + u_{y1} \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= u_{x2} \cos\theta + u_{y2} \sin\theta \\ V_2 &= u_{x2} \sin\theta + u_{y2} \cos\theta \end{aligned}$$

En posant $\lambda = \cos\theta$, $\mu = \sin\theta$, il vient :

$$|T| = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \end{vmatrix}$$

De la relation $|f| = |K| |\delta|$, nous déduisons

$$\begin{aligned} |T|^{-1} |F| &= |K| |T|^{-1} |\Delta| \\ \text{soit } |F| &= |T| |K| |T|^{-1} |\Delta| \\ |F| &= |R| |\Delta| \end{aligned}$$

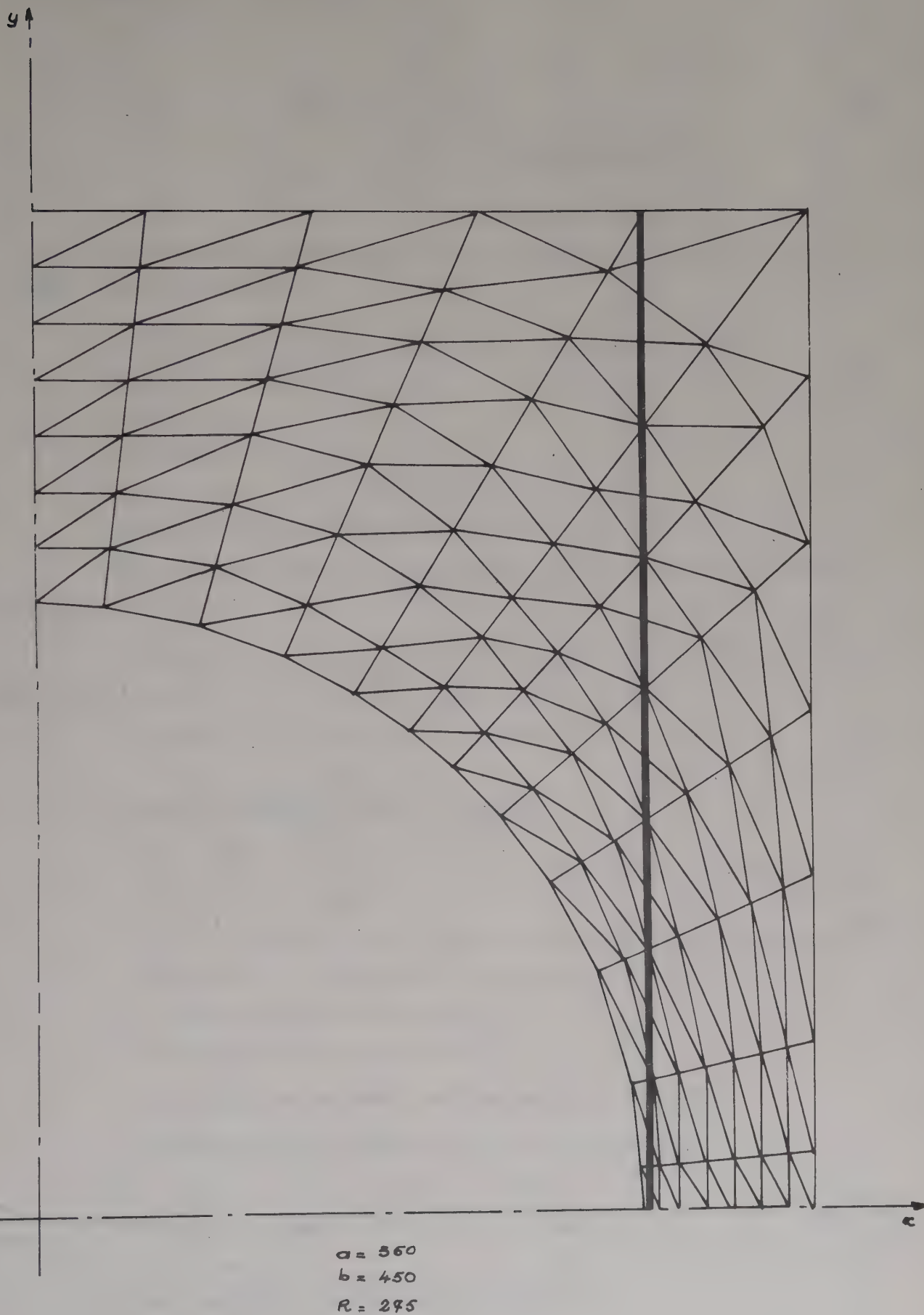
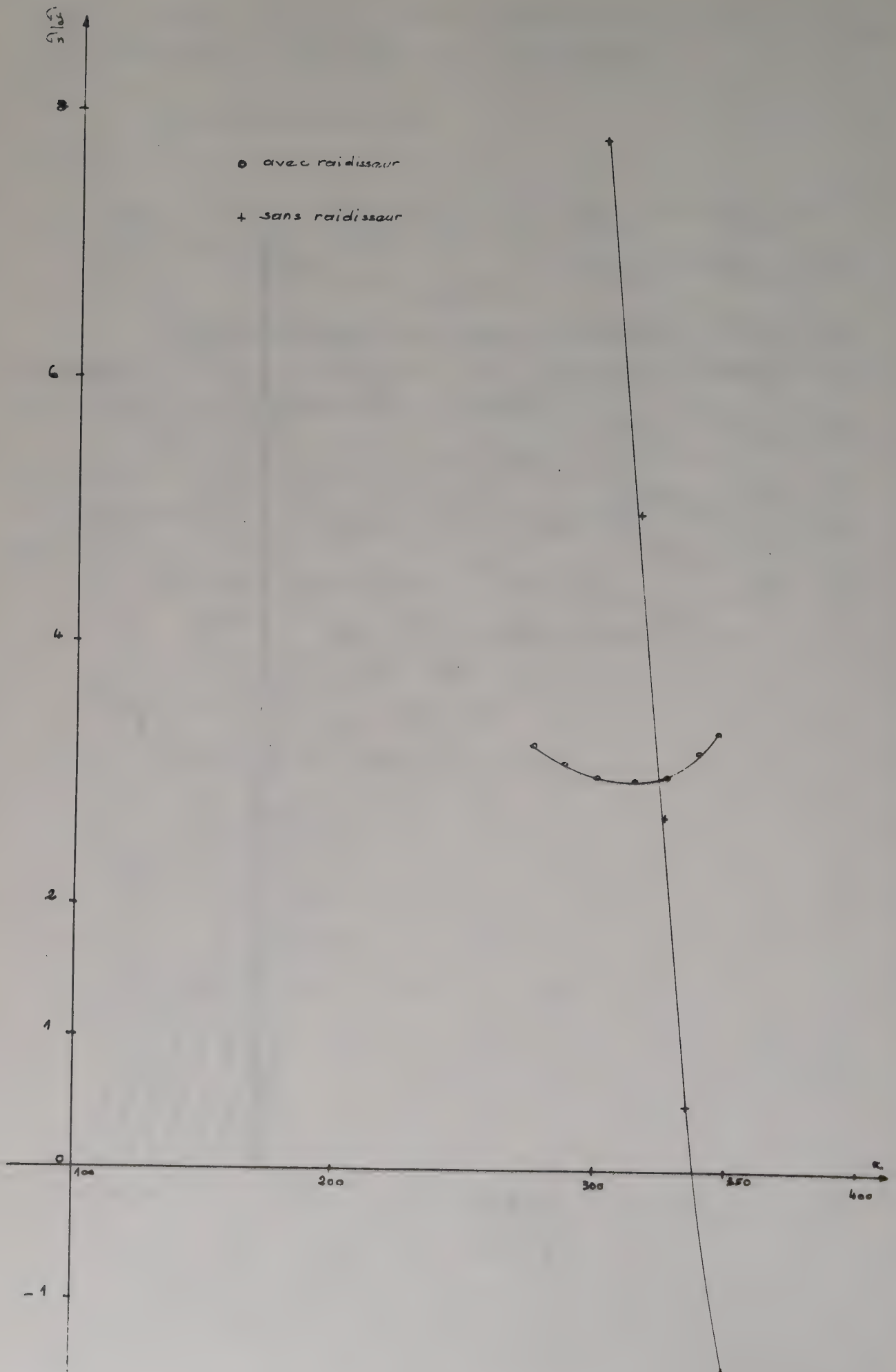


Fig. 52-11



en posant $|R| = |T| |K| |T|^{-1}$

$$\text{avec } |R| = \frac{ES}{L} \cdot \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{vmatrix}$$

Le programme RAIDE initial est modifié afin de pouvoir prendre en compte ces éléments barres.

Ce programme est testé en étudiant la plaque suivante :
plaque de dimensions :

$a = 350 \text{ mm}$

$b = 450 \text{ mm}$

$e = 0,1 \text{ mm}$

percée d'un trou de diamètre $2R = 550 \text{ mm}$

Cette plaque possède 2 raidisseurs tangents au trou, parallèles à l'axe Oy. (Fig. 52-11)

Le premier calcul est fait pour la plaque sans raidisseur, le second pour la plaque avec raidisseur. (Fig. 52-12)

La section du raidisseur est $S = 1 \text{ mm}$.

5.2.2 Plaques percées de trous elliptiques

Cette étude comprend 2 parties :

- Une première étude est faite en faisant varier simultanément les 2 axes de l'ellipse
- dans une seconde étude, l'axe de l'ellipse suivant Ox garde une valeur fixe, l'axe suivant Oy variant.

Le 1/2 axe suivant Ox est noté a'

Le 1/2 axe suivant Oy est noté b' .

5.22.1 *Etude des majorations lorsque a' et b' varient*

Les dimensions de la plaque sont fixes et valent :

$a = 350 \text{ mm}$

$b = 450 \text{ mm}$

$c = 0,1 \text{ mm}$

Nous considérons les ellipses suivantes :

E1 :	$a' = 50$ $b' = 200$	E2 :	$a' = 100$ $b' = 200$	E3 :	$a' = 100$ $b' = 150$
E4 :	$a' = 150$ $b' = 100$	E5 :	$a' = 200$ $b' = 100$	E6 :	$a' = 200$ $b' = 50$

Un exemple de découpage est montré sur la figure 52-13.

Les courbes des figures (52-14) et (52-15) montrent les variations des contraintes σ_y sur l'axe Ox et σ_x sur l'axe Oy pour les différents cas.

5.22.2 Etude des majorations de contraintes pour des ellipses dont seul l'axe b' varie.

Pour cette étude, les dimensions de la plaque sont fixes :

$$a = 350 \text{ mm}$$

$$b = 450 \text{ mm}$$

$$e = 0,1 \text{ mm}$$

On fixe le $1/2$ axe a' suivant Ox avec $a' = 100$

Le $1/2$ axe b' suivant Oy variant et prenant les valeurs suivantes :

ellipse E2	$a' = 100$ $b' = 200$
------------	--------------------------

ellipse E3	$a' = 100$ $b' = 150$
------------	--------------------------

cercle C3	$R = 100$
-----------	-----------

ellipse E9	$a' = 100$ $b' = 75$
------------	-------------------------

ellipse E10	$a' = 100$ $b' = 50$
-------------	-------------------------

Si nous comparons les résultats à ceux obtenus pour une plaque percée d'un trou circulaire de rayon $R = a' = 100$ (cercle n° 3), nous constatons que pour des ellipses dont $b' > R$ (donc a') la majoration de contrainte est plus faible que pour le cercle.

Cette majoration devenant plus importante lorsque b' diminue.

Inversement, lorsque b' devient $< R$ la majoration de contrainte devient plus importante. (Fig. 52-16)

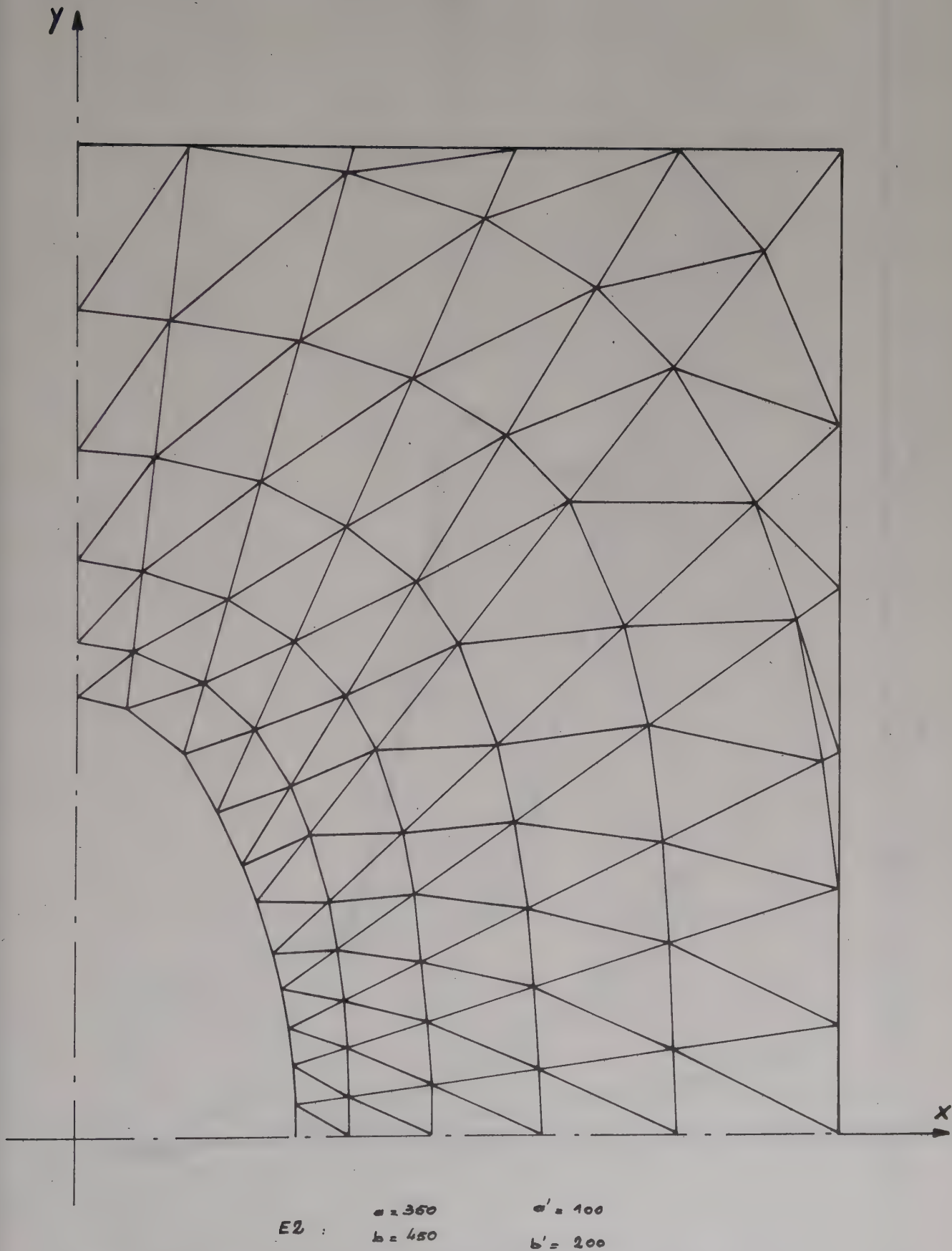
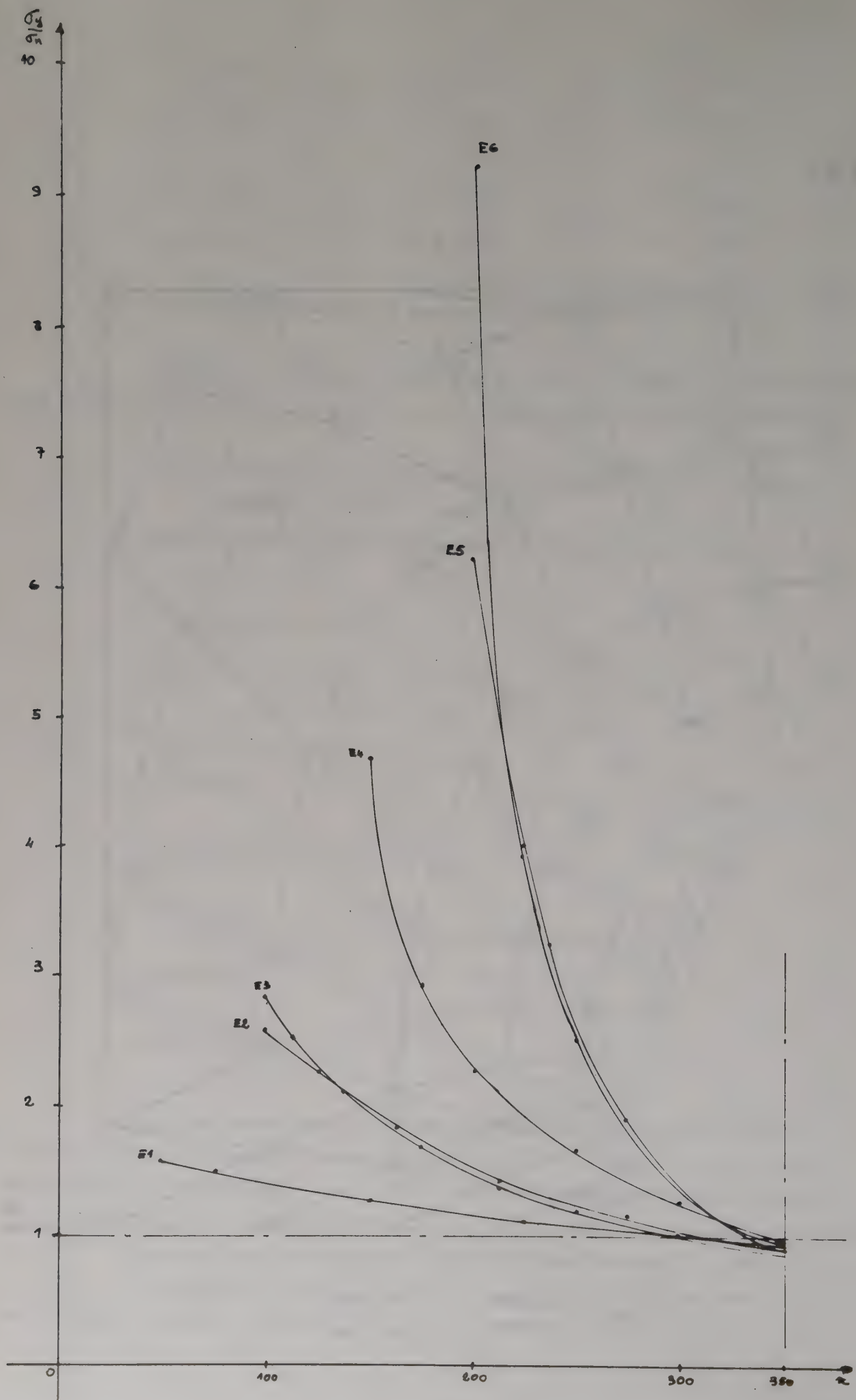


Fig. 52-13



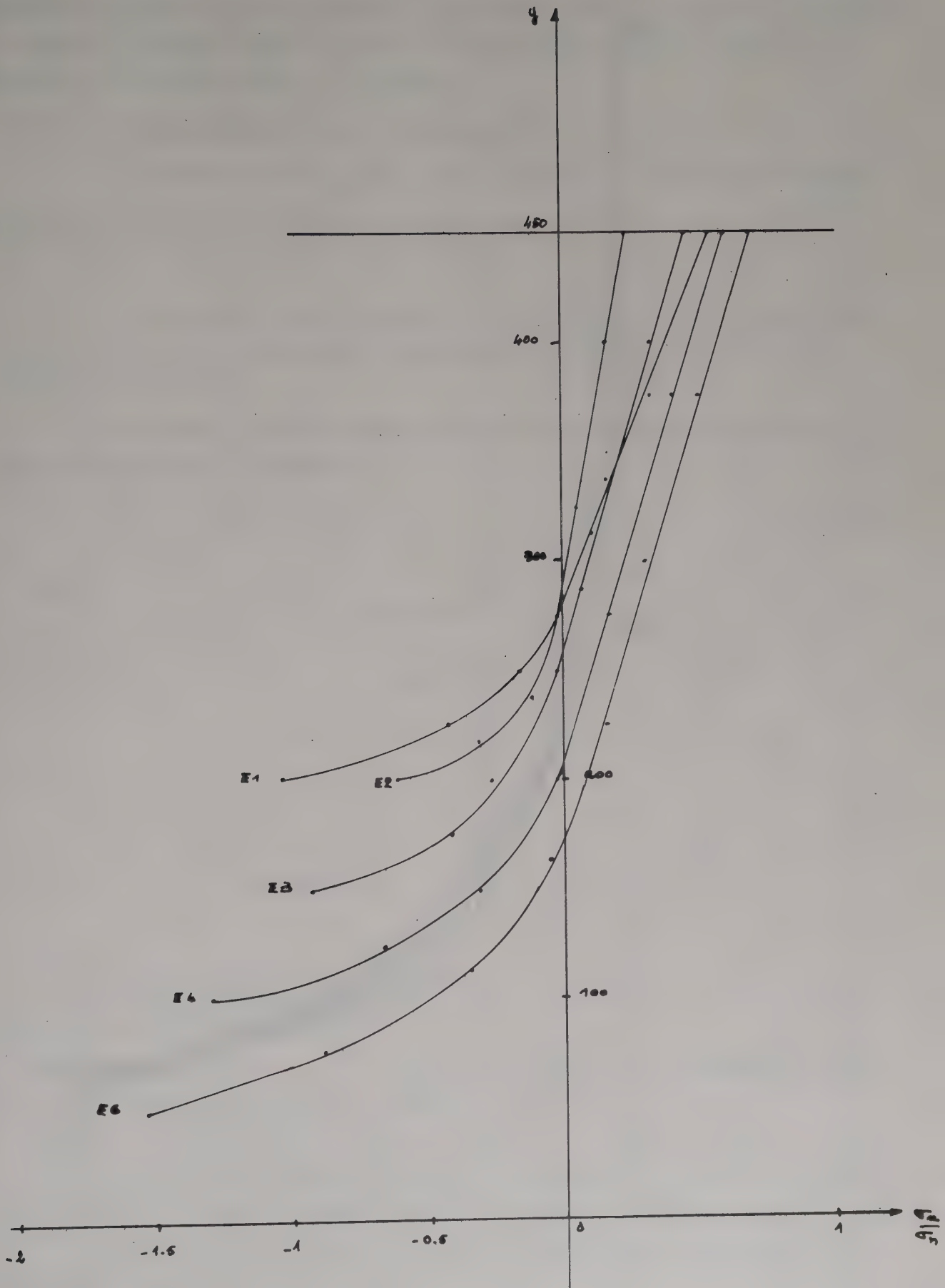


Fig. 52-15

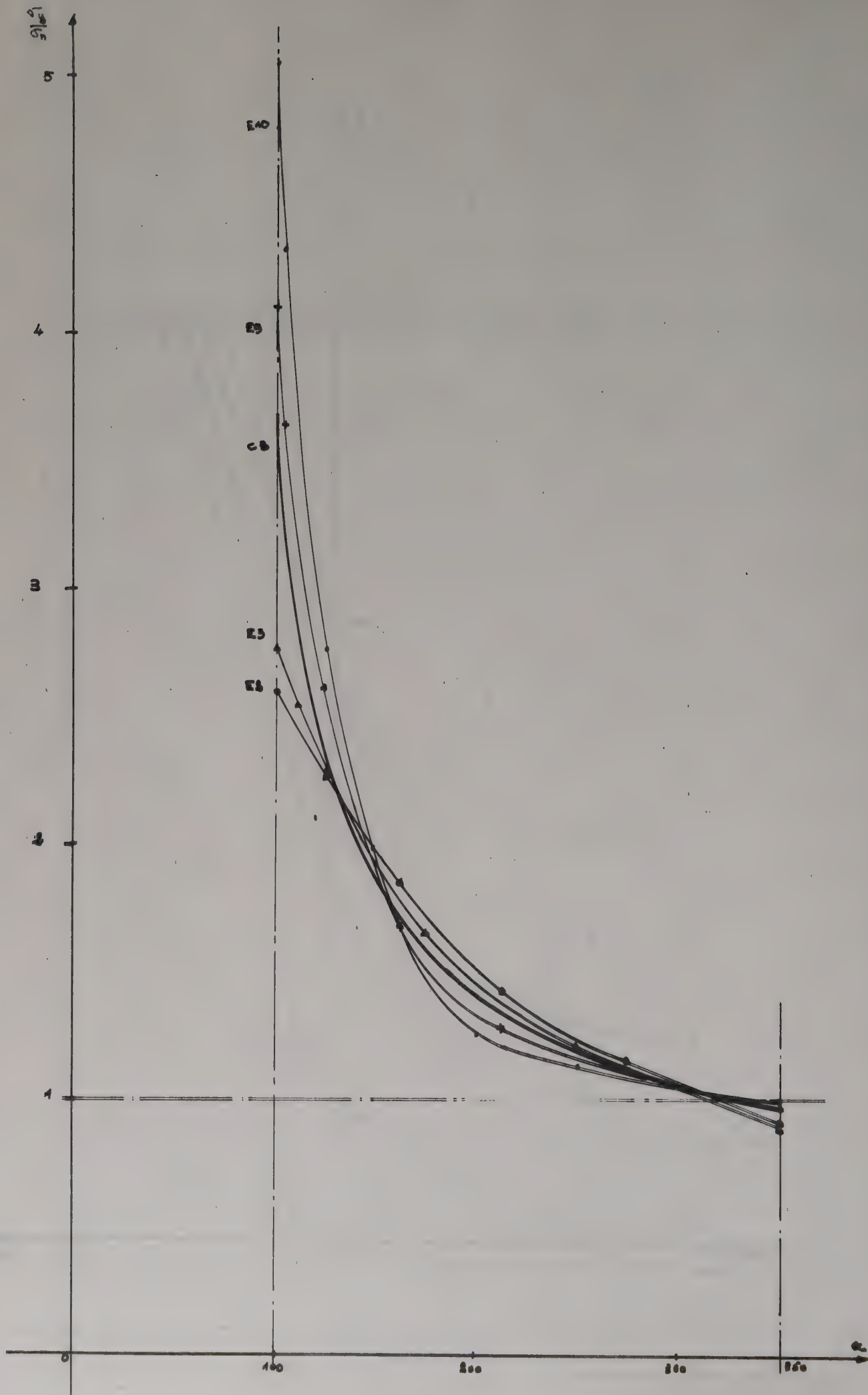


Fig. 52-16

D'autre part, nous remarquons que la courbure des courbes augmente lorsque b' diminue, c'est à dire que les courbes E2, E3 se situent au dessous de la courbe C4 au bord du trou, passent au dessus dans la région médiane et reviennent en dessous au bord de la plaque.

Inversement pour les courbes E9, E10.

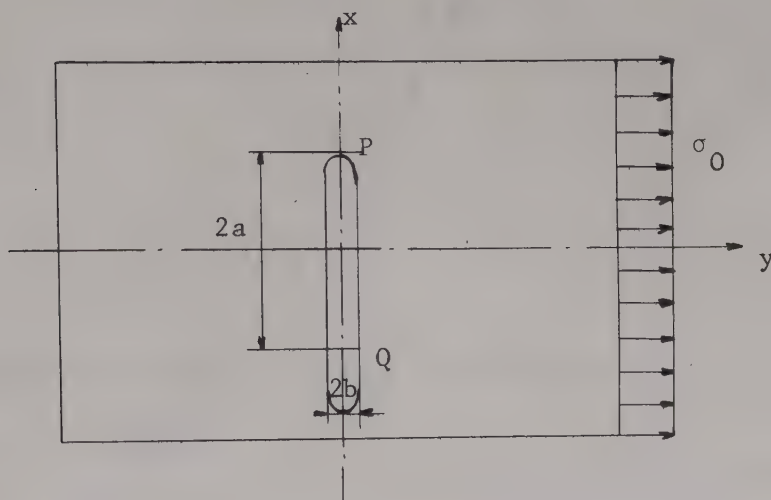
La courbe suivante (fig. 52-17) donne les variations de la majora-

tion de contrainte $k = \frac{(\sigma_y)_{a'}}{\sigma_n}$ en fonction de b' .

D'autre part pour l'ellipse n° 10 si nous comparons la contrainte σ_y au bord du trou à la contrainte théorique, nous constatons que ces deux valeurs sont voisines.

En effet, la valeur théorique de la contrainte pour une plaque infinie est donnée par la formule :

$$\sigma(P) = \left(1 + \frac{2a}{b}\right) \sigma_n$$



Pour l'ellipse n° 10 nous avons :

$$a = 100 \quad b = 50 \quad \sigma_n = 10$$

d'où

$$\sigma(P) = \sigma_n \left(1 + \frac{200}{50}\right) = 5 \sigma_n = 50$$

Les calculs donnent :

$$\sigma(P) \approx 50,5$$

Donc pour cette ellipse, on pourra considérer que la plaque est infinie.

$$(a' < \frac{a}{3,5})$$

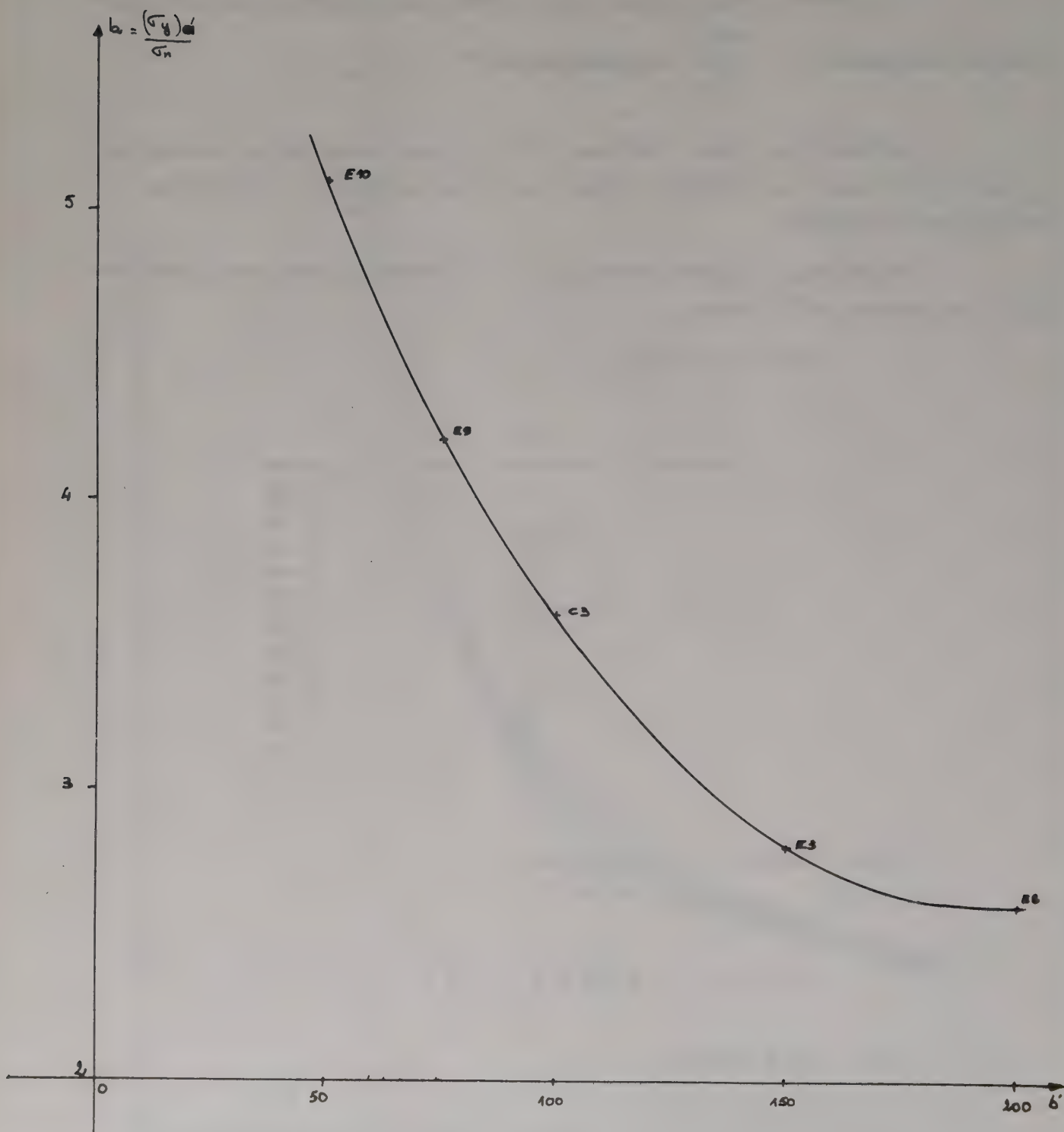


Fig. 52-17

Ici encore, nous avons quelques éléments de comparaison avec la photoélasticité.

Nous pouvons comparer les résultats obtenus pour l'ellipse E3 avec une plaque de dimensions infinies ($\frac{a}{a'} = 10$)

<u>Ellipse E3</u>		<u>Plaque infinie</u>	
$\lambda = \frac{b'}{a'} = 1,5$	$k_1 = 2,80$	$\lambda = \frac{b'}{a'} = 1,5$	$k_1 = 2,50$
$\frac{a}{a'} = 3,5$	$k_2 = -0,94$	$\frac{a}{a'} = 10$	$k_2 = -1,03$

De même, nous pouvons comparer les valeurs obtenues pour les ellipses E9 et E10.

<u>Ellipse E9</u>		<u>Plaque infinie</u>	
$\lambda = \frac{b'}{a'} = 0,75$	$k_1 = 4,10$	$\lambda = \frac{b'}{a'} = 0,66$	$k_1 = 4,13$
$\frac{a}{a'} = 3,5$		$\frac{a}{a'} = 10$	

<u>Ellipse E10</u>	
$\lambda = \frac{b'}{a'} = 0,5$	$k_1 = 5,05$
$\frac{a}{a'} = 3,5$	

Sur la courbe de la figure (52-17) nous trouvons :

$$\text{pour } \lambda = 0,66 \quad k_1 = 4,46$$

Donc dans ce cas, un écart par rapport aux résultats de photoélasticité égal à 7,5 %.

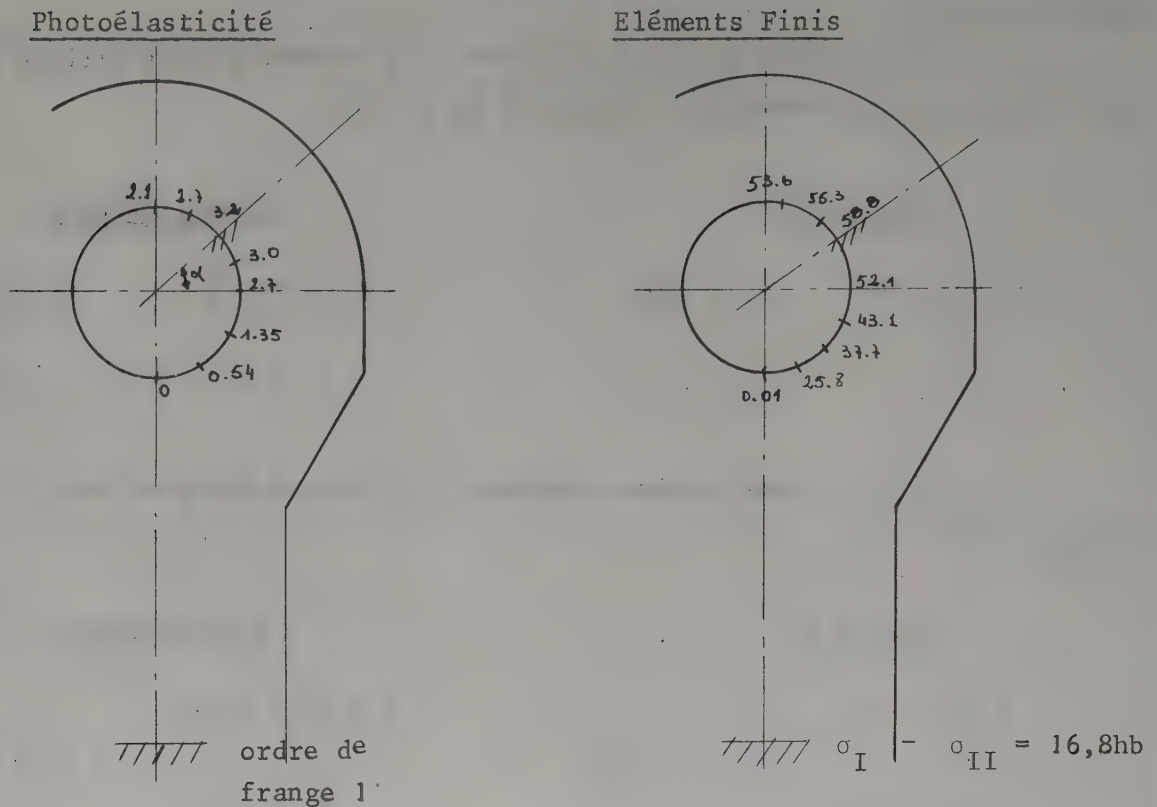
Nous obtenons donc des résultats très acceptables, compte-tenu des différentes conditions d'essai.

5.3 - ETUDE DE PROBLEMES INDUSTRIELS -

5.3.1 Etude d'un tirant de presse

Nous donnons sur la figure 53-1 la comparaison des résultats obtenus en photoélasticité et par la Méthode des Eléments Finis.

Fig. 53-1



Majoration de contrainte : 3,2
 Section la plus chargée : $\alpha \approx 45^\circ$
 avec $\sigma_I - \sigma_{II} = 64 \text{ hb}$
 $\sigma_I = 34 \text{ hb}$
 $\sigma_{II} = -30 \text{ hb}$
 charge : 1 020 T

3,5
 $\alpha \approx 40^\circ$
 58,8 hb 60 hb
 31,6 hb 32,2 hb
 - 27,2 hb - 27,8 hb
 1 000 T 1 020 T

L'écart entre les deux essais est de l'ordre de 5,5 %.

5.3.2 Etude d'une crémaillère

Nous avons voulu montrer comment la méthode des éléments finis pouvait s'appliquer à des problèmes complexes : sollicitations relatives de deux structures.

Nous avons cherché à déterminer la valeur des réactions sur chacune des dents de deux crémaillères identiques. En effet, ces efforts étant connus, le calcul des déplacement et des contraintes par la méthode des Eléments Finis ne présentent plus de difficulté.

Afin de vérifier les résultats obtenus une étude photoélastique a été faite.

5.32.1 Etude par la méthode des éléments finis

5.32.1.1 Hypothèses de Calcul

Deux hypothèses fondamentales ont guidées notre étude

5.32.1.1.1 Symétrie des réactions.

Les crémaillères étant identiques, elles travailleront de manière identique, c'est à dire en adoptant les notations de la figure (53-2) :

- si la dent (1) de la crémaillère A est soumise à un effort f_1 , la dent (10) de la crémaillère B est soumise à la même force f_1 , donc par raison de symétrie la dent (10) de la crémaillère A.

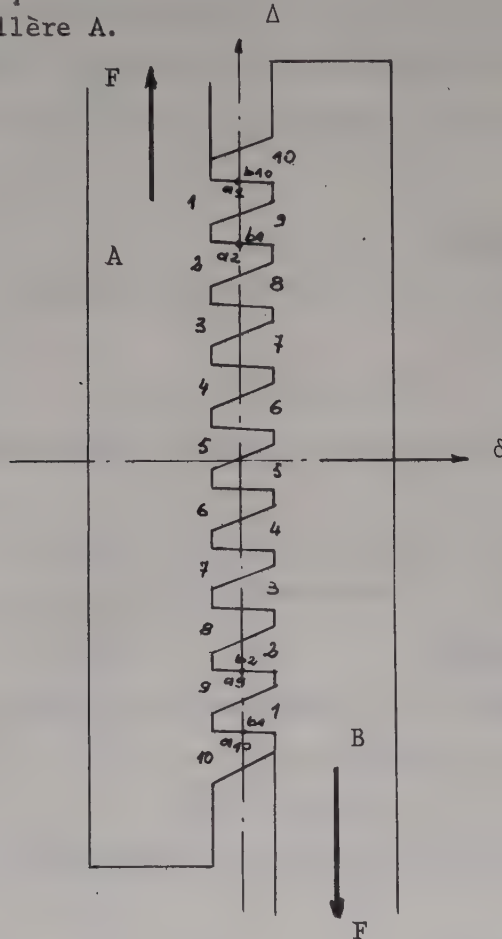


Fig. 53 - 2

De la même façon, si la dent (2) est soumise à une force f_2 , la dent (9) est soumise au même effort f_2 .
 et les dents (3) et (8) à un effort f_3
 (4) et (7) à un effort f_4
 (5) et (6) à un effort f_5

5.32.1.1.2 Symétrie des déplacements

Si le point a_1 situé sur l'axe Δ se déplace d'une valeur δ_1 par rapport à l'axe δ , le point b_1 se déplace par raison de symétrie d'une valeur $-\delta_1$, donc le point a_{10} . Donc le point a_{10} se déplace de $-\delta_1$.

De la même manière

si a_2 se déplace de δ_2 , a_9 se déplace de $-\delta_2$
si a_3 se déplace de δ_3 , a_8 se déplace de $-\delta_3$
si a_4 se déplace de δ_4 , a_7 se déplace de $-\delta_4$
si a_5 se déplace de δ_5 , a_6 se déplace de $-\delta_5$

5.32.1.2 Processus de Calcul

Compte tenu des hypothèses précédentes, le problème est donc de trouver un système de forces $\{f_i\}$, satisfaisant la première hypothèse, tel que le système de déplacements $\{\delta_i\}$ résultant satisfasse la seconde hypothèse.

Nous avons donc procédé par itérations - Trois itérations furent nécessaires.

1ère itération

Nous fixons à priori le système de forces $\{f_i\}$, nous le choisissons le plus simple soit :

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = \frac{F}{10}$$

avec $F = 400 \text{ kg}$, ce qui conduit à une contrainte nominale de 1 kg/mm^2 .

Le système de déplacements $\{\delta_i\}$ obtenu est indiqué par la courbe (I) de la figure (53-4), la dissymétrie étant importante.

2ème itération

Afin d'augmenter le déplacement de la dent (10), nous adoptons une répartition de réactions parabolique :

courbe (II) de la figure (53-3)

Les déplacements obtenus sont représentés par la courbe (II) de la figure (53-4).

3ème itération

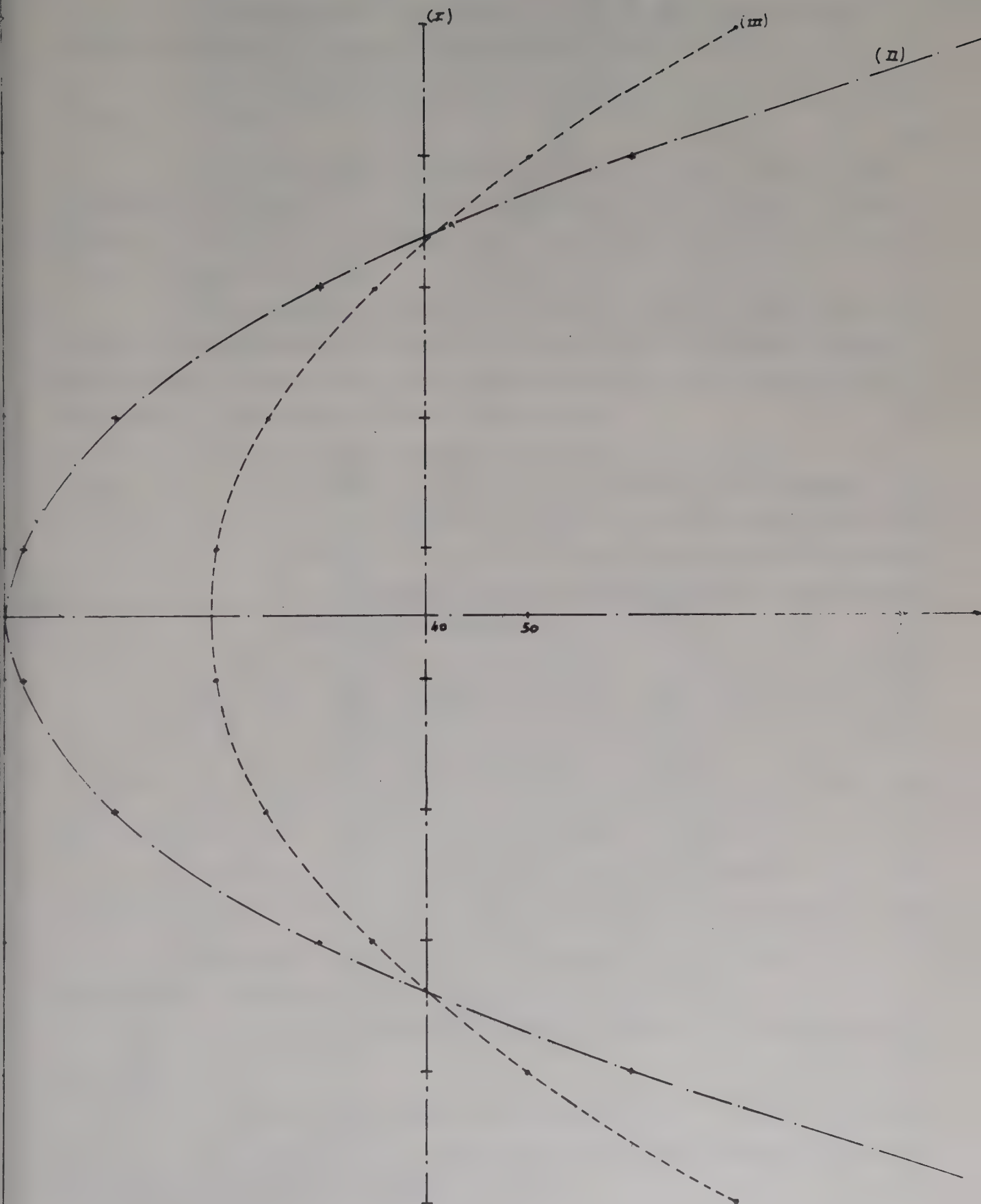
Compte tenu des deux courbes de déplacements (I) et (II), la 3ème itération est faite avec une répartition de réactions moyenne, conformément à la courbe (III).

Et nous obtenons le système de déplacements cherchés puisque la symétrie est vérifiée avec une erreur maximum de : 0,005.

5.32.2 Etude par la photoélasticité

L'étude des crémaillères précédentes est reprise par la photoélasticité. Ces essais sont réalisés sur un photoélasticimètre bidimensionnel, type Robert, licence STCAN, fabriqué par Jobin et Yvon.

des



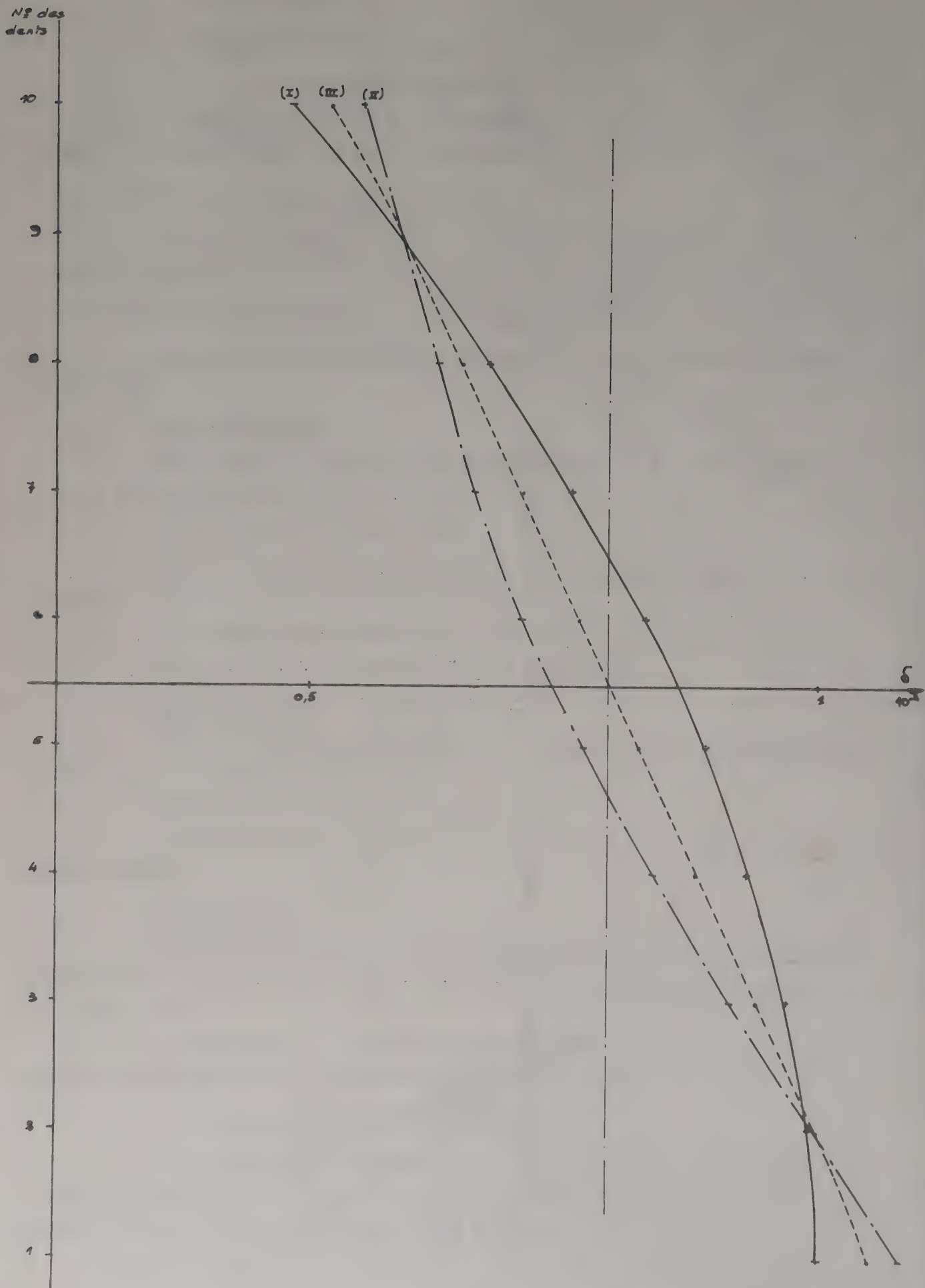


Fig. 53-4

Cet appareil, utilisant les propriétés de biréfringence des matériaux, puise son originalité dans le procédé d'analyse de la lumière qui permet un affichage digital des résultats.

Les photographies (53-5 a) et (53-5 b) montrent le photoélastimètre d'une part et le montage expérimental d'autre part.

Les crémaillères sont réalisées à l'échelle 1, en altuglass d'indice égale à : 1,4898.

L'appareil permet de mesurer $\sin\phi$ en tout point, ϕ étant la biréfringence qui correspond au cisaillement maximum $\sigma_I - \sigma_{II}$. ϕ_0 étant la biréfringence nominale, on peut donc connaître le facteur de majoration de contraintes ϕ/ϕ_0 en tout point.

Le déplacement vertical de la table de l'appareil étant limité, il ne nous a pas été possible de réaliser des crémaillères suffisamment longues pour obtenir une bonne répartition de contraintes dans les sections précédant les dents. ϕ_0 n'est donc pas connu avec précision.

Le tableau suivant donne :

- les valeurs de $(\sigma_I - \sigma_{II})/\sigma_0$ obtenues par les éléments finis
- les valeurs de $\phi/k, \phi$ obtenu en photoélasticité, k étant une constante que nous déterminons en écrivant que les valeurs $(\sigma_I - \sigma_{II})/\sigma_0$ et ϕ/k sont sensiblement égales dans la partie médiane de la crémaillère.

	Dent n° 1	Dent n° 2	Dent n° 3	Dent n° 4	Dent n° 5	Dent n° 6	Dent n° 7	Dent n° 8	Dent n° 9	Dent n° 10
$\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{\sigma_0}$	1,43	1,22	0,95	0,78	0,68	0,64	0,65	0,72	0,86	1,04
ϕ/k	1,58	1,37	1,02	0,79 ⁶	0,73	0,64	0,60	0,73 ⁵	0,91	1,10

Les courbes de la figure 53-6 montrent les variations du facteur de majoration de contraintes.

La courbe I correspond aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis.

La courbe II correspond aux résultats obtenus en photoélasticité.

La concordance des résultats est assez bonne, puisque l'écart maximum entre les deux courbes est de : 9,5 %.

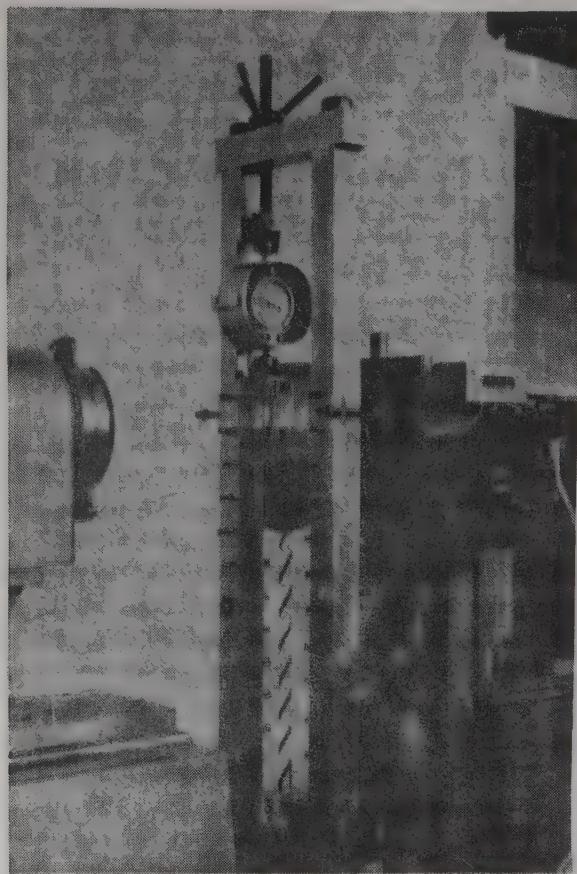
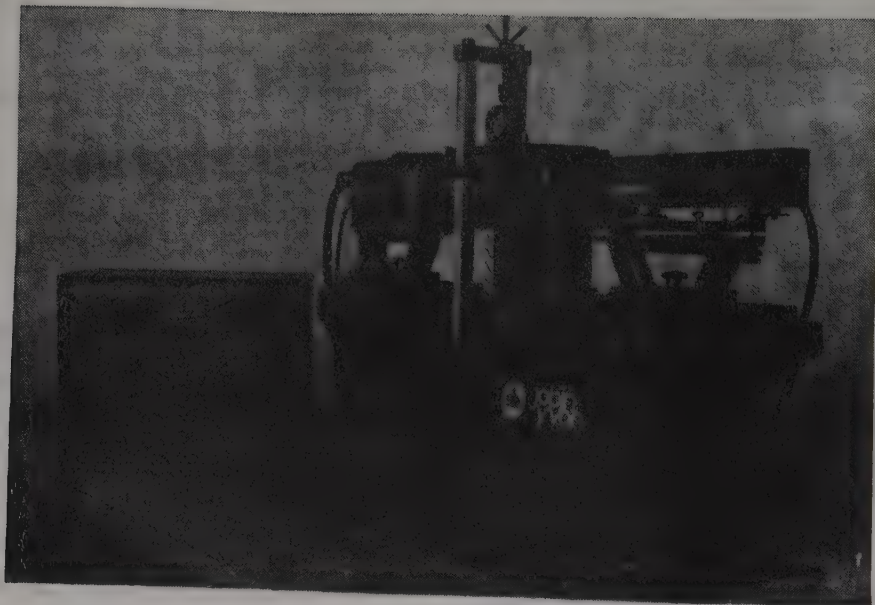
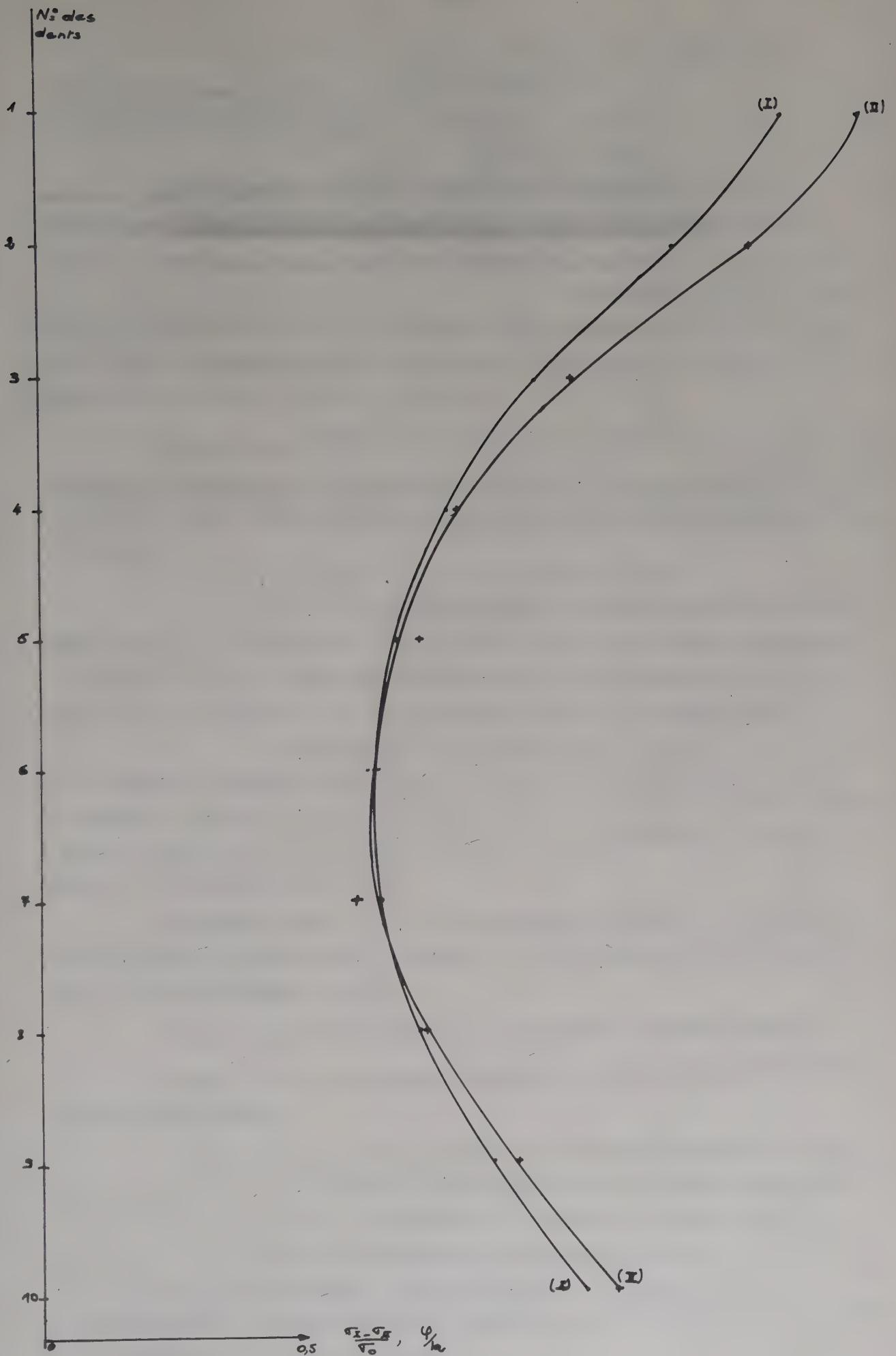


Fig. 53-5 a et 53-5 b



Ces écarts sont dûs principalement :

- à la difficulté d'obtenir une portance parfaite de toutes les dents. La précision d'usinage des crémaillères est de l'ordre du centième.
- comme nous l'avons déjà dit, nous n'obtenons pas une répartition uniforme de la contrainte, le dispositif de mise en traction des crémaillères étant assez rapproché de la première dent.
- les mesures sont ponctuelles, il est donc difficile d'estimer avec précision la position du maximum de ϕ pour une dent donnée. De plus des imperfections du matériau peuvent avoir une grande influence sur la mesure.

Donc compte tenu de ces sources d'erreur, nous pouvons considérer qu'il y a une bonne corrélation entre les deux études.

VI - CONCLUSION

Cette étude montre les différentes possibilités qu'offre la "Méthode des Eléments Finis" appliquée à l'étude des structures planes.

L'étude de convergence et de précision des résultats a montrée qu'exceptées les structures très élancées, tous les problèmes plans peuvent être pratiquement étudiés avec le modèle mathématique simple que nous avons adopté : le modèle déplacement et l'élément triangulaire à 6 degrés de liberté.

Compte tenu de cette restriction et des précautions à prendre pour réaliser le découpage de la structure en éléments finis, les avantages de cette méthode par rapport aux méthodes classiques (photoélasticité, extensométrie, ...) sont :

- la précision et la rapidité des calculs
- la facilité d'exploitation des résultats et des informations fournis par l'ordinateur : en utilisant une table traçante connectée à l'ordinateur, on peut connaître immédiatement les contraintes principales en tout point d'une structure et les différents réseaux de courbes associés.
- la possibilité et la facilité de faire varier à volonté les différents paramètres intervenant pour une étude systématique, permet de conduire rapidement une telle étude. Le prix de revient sera bien inférieur à celui d'une étude classique pour laquelle il est nécessaire de réaliser autant de modèles que nécessaire.

Toutefois, dans le cas de structures complexes, où la forme des résultats n'est pas prévisible, l'emploi de cette méthode est délicat, les moyens de contrôle étant limités.

Il est donc assez difficile de déceler des erreurs possibles.

Aussi il est certainement intéressant de vérifier les résultats par une autre méthode.

Notre étude ne traite qu'une petite partie du calcul des structures par la méthode des éléments finis puisque seuls les problèmes plans ont été abordés. Mais avec un ordinateur de capacité en mémoires une peu supérieure à celui dont nous disposons actuellement, on pourra sans apporter de modifications profondes à notre programme de calcul, mettre en oeuvre cette méthode avec d'autres éléments caractéristiques et traiter les problèmes de révolution ou tridimensionnels.

L'étude des plaques en flexion et des coques par la méthode des Eléments Finis commence à se développer, mais elle pose des problèmes théoriques complexes, en outre la mise en oeuvre de cette méthode nécessite un ordinateur de grande capacité.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 DURAND E. Solutions Numériques des équations algébriques
Tome II - Masson et Cie (1961)
- 2 FINE J. La méthode des éléments finis
Ecole des Mines de Paris - Séminaire 1970
- 3 LAMEAU Eléments de Calcul tensoriel
Cours E.N.S.M. Nantes
- 4 LANDAU et LIFCHITZ Théorie de l'élasticité
Editions de Moscou (1967)
- 5 MANDEL J. Cours de Mécanique des Milieux continus
Gauthier-Villars éditeurs (1966)
- 6 TARDY D. Cours de Résistance des Matériaux
E.N.S.M. Nantes
- 7 PRZEMIENIECKI J.S. Theory of Matrix Structural Analysis
Mc Graw-Hill (1968)
- 8 DE G. ALLEN D.N. The finite difference approach
And WINDLE D.W. Stress-Analysis O.C. Zienkiewicz - G.S. Holister
(1965)
- 9 DE G. ALLEN D.N. Stress-Analysis of shells I
Stress-Analysis - O.C. Zienkiewicz -
G.S. Holister (1965)
- 10 DE G. ALLEN D.N. Stress-Analysis of shells II
and BRITWISTLE G.M. Stress-Analysis of shells III
Stress-Analysis of shells IV
Stress-Analysis - O.C. Zienkiewicz -
G.S. Holister (1965)
- 11 TIMOSHENKO S. Theory of Elasticity
and GOODIER H.J. 3rd ed., Mc Graw-Hill (1970)

- 12 FRAEIJIS DE VEUBEKE Displacement and équilibre models in the finite element method.
Stress-Analysis - O.C. Zienkiewicz - Holister (1965)
- 13 REISSNER E. On a variational theorem in elasticity
J. of Math. And Physics. Vol. 29, 1950
- 14 SANDER G. Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques
Thèse du Docteur en Sciences Appliquées de l'Université de Liège (4 juin 1969).
- 15 GREENE B.E. JONES R.E. Generalized variational principles in the finite
Mc LAY R. W. STROME D.R. element method. A I A A J New-York. Vol. 7, n° 7 (1969).
- 16 ABSI E. Méthode des Eléments Finis - Annales de l'Institut Technique du bâtiment et des Travaux Publics (22 - N° 262 - Octobre 1969).
- 17 GUELLEC P. La méthode des Eléments Finis et ses applications aux problèmes de Génie Civil.
Rapport de recherche n° 8 (septembre 1970)
Ministère de l'Equipement et du Logement - Laboratoires des Ponts et Chaussées.
- 18 PRAGER W. Variational Principles for Elastic Plates with relaxed Continuity Requirements.
Internation Jo of Solids and structures Vol. 4 - N° 9 - 1968.
- 19 ANDERHEGGEN E. Finite element plate bending equilibrium analysis.
Journal of the Engineering Mechanics Division (Août 1969).

- 20 CORNELIS A. DEPREZ G. Applications des ordinateurs au calcul
FONDER G. MASSONNET CH. des structures - Eyrolles - Masson et
MAQUOI R. MULLER R. et Cie (1968).
- 21 ABSI E. Calcul automatique des structures
Construction métallique CTICM (mars 1968)
- 22 ARGYRIS Energie Theorems ans structural analysis 1955
- 23 TURNER CLOUGH Stiffness and deflection analysis of complex
MARTIN TOPP structures (1966)
- 24 ZIENKIEWICZ O.C. The finite Element Method in structural and
CHEUNG Y.K. continuum Mechanics - Mc Graw-Hill (1967)
- 25 CLOUGH R.W. The finite Element Method in structural
mechanics - Stress-Analysis - Zienkiewicz
and Holister (1965).
- 26 PIN-CHUN Wang Calcul des structures par les méthodes numé-
riques et matricielles - Applications sur
Calculateurs - Dunod (1969)
- 27 TINSLEY ODEN J. Finite plane stress of incompressible elastic
Solids by the finite element method.
The aéronautical Quarterly (1968).
- 28 MEEK J.L. The finite element method in structural
Mechanics - Civil Engineering Transactions
(1966).
- 29 MIRZAD S.H. Finite element shell solution, equilibrium
approach, proceedings.
Symposium on Arch Dams, The Institution of
Civil Engineers, London, (1968).
- 30 ZLAMAL M. On the finite element method - Numer - Math.
-12- (1968).
- 31 PAULLING J.R. The analysis of complexe ship structures by the
finite Element technique - Journal of ship
Research (1964).

- | | | |
|----|------------------------------|---|
| 32 | HOLAND I. KOBLEIN B. | Finite Element Method in stress-Analysis. |
| 33 | SMITH R.G.
WEBSTER J.A. | Matrix Analysis of Beam-Colonms by the method of finite elements. Marischal College, University of Aberdeen - Communicated by Professor ALLEN J. (1965). |
| 34 | ODEN J.T. | Calculation of stifness Matrix for finite element of thin shells of arbitrary shape. AIAA Journal - Vol. 6 n° 5 (1968). |
| 35 | DUPUIS G.
GOEL J.J. | Elements raffinés en élasticité bidimensionnelle. - Z. Angew - Math., Phys., Schweiz - Vol. 20 - n° 6 (1969). |
| 36 | CANTIN G. and
CLOUGH R.W. | A curved, cylindrical-shell, finite element AIAA Journal - Vol. 6 - n° 6 (1968). |
| 37 | FRAEIJIS DE VEUBEKE B. | Sur certaines inégalités fondamentales et leur généralisation dans la théorie des bornes supérieures et inférieures en élasticité. Rev. Univ. des Mines, XVII, n° 5 (1961). |
| 38 | FRAEIJIS DE VEUBEKE B. | Upper and Lower bonds in matrix structural analysis - Agardograph, 72, 165 Pergamon Press (1964). |
| 39 | MIRZAD S.H. | Calcul des coques par une nouvelle technique aux éléments finis. Thèse présentée le 13.12.68 - Université de Paris. |
| 40 | PRATO C.A. | Shell finite element method via Reissner's principle - Internation. J., Solids, Struct. G.B. Vol. 10 - n° 5 - (1969). |

- 41 HRENNIKOFF A. Precision of finite element method in plan Stress - Ass. Internation., Pouts Charp. Mem., Suisse - Vol. 29 n° 2 - (1969).
- 42 MORLEY L.S.D. A finite element application of the modified Rayleigh - Ritz method. - Internation. J., numer. Method Engng, G.B. Vol.2 n° 1 - (1970).
- 43 LYNN P.P. Kinds of convergence and improved convergence
BORESI A.P. of conforming finite element solution in plate bending. Nucl. Engng, Design, Netherl. Vol. 11 N° 2 - (1969).
- 44 PIN-TONG Exact solution fo certain problems by finite element method. AIAA Journal - Vol. 7 - n° 1 (1968).
- 45 PIN-TONG The convergence of finite element methode in
PIAN T.H.H. solving linear elastic problems. Journal of solids structures - Vol. 3 (1967).
- 46 JOHNSON M.W. Convergence of the finite element method in
Mc LAY R.W. the theory of elasticity -"Transaction of the ASME".
- 47 COURBON J. Cours de résistance des Matériaux - Dunod 1955
- 48 HOWLAND R.C.J. On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension. Phil. transaction A, Vol. 229 - (1930).

PROGRAMME RAIDE

DISK OPERATING SYSTEM/360 FORTRAN 360N-FO-451 CL

```

DEFINE FILE 8(1800,22,U,INDB),10(600,300,U,INDK),11(600,300,U,INDC
1),9(1000,2,U,IND),12(100,1,U,IN)

```

```

DIMENSION S(30,30),Q1(30,30),Q2(30,30),BB(3,2),SA(3,2),SB(3,2),
ISC(3,2),RA(2,3),QA(2,2),X(1000),Y(1000),LL(100),D(3,3)

```

```

INDK=1

```

```

INDC=1

```

```

IN=1

```

```

INDB=1

```

```

IND=1

```

```

L=0

```

```

L1=1

```

```

I1=1

```

```

II=0

```

```

L2=2

```

```

READ(1,1000)CU,E

```

```

READ(1,1001)INB,INOEUD

```

```

WRITE(3,1001)INB,INOEUD

```

```

READ(9,IND)(X(I),Y(I),I=1,INOEUD)

```

```

901 FORMAT(2X,3I10)

```

```

1000 FORMAT(F5.2,F10.2)

```

```

1001 FORMAT(2I5)

```

```

READ(1,1005)T

```

```

1005 FORMAT(F8.2)

```

```

D(1,1)=1.

```

```

D(2,2)=1.

```

```

D(3,3)=(1.-CU)/2.

```

```

D(1,2)=CU

```

```

D(1,3)=0.

```

```

D(2,3)=0.

```

```

DO 1002 I=1,3

```

```

DO 1002 J=1,3

```

```

D(I,J)=D(I,J)*E/(1.-CU**2)

```

```

1002 D(J,I)=D(I,J)

```

```

WRITE(3,805)D

```

```

805 FORMAT('O',' MATRICE D '///(2X,3E16.9))

```

```

89 IF(L2-1)6,5,92

```

```

92 READ(1,801)M,N,IP,L2

```

```

WRITE(3,2000)M,N,IP,II

```

```

2000 FORMAT(4I10)

```

```

IL=1

```

```

L=L+1

```

```

IA=M

```

```

IB=M+1

```

```

IC=N+1

```

```

GO TO 89

```

```

5 IF(IL-1)95,95,96

```

```

96 IF(II-INB)97,717,717

```

```

97 IF(IC-IP)19,10,19

```

```

19 IF(IA-N)9,11,9

```

```

11 IF(IB-IP)12,92,12

```

```

12 IC=IB

```

```

IB=IB+1

```

```

GO TO 95

```

```

10 IF(IB-N)13,92,12

```

17/05/71

FORTMAIN

```
13   IA=IB
     IB=IB+1
     GO TO 95
9    IF(IL/2-IL/2.)93,94,93
94   IA=IB
     IB=IC+1
     GO TO 95
93   IC=IB
     IB=IA+1
     GO TO 95
6    READ(1,801)IA,IB,IC,L2
801  FORMAT(4I4)
95   IAI=2*(IA-M)+1
     IBI=2*(IB-M)+1
     ICI=2*(IC-M)+1
     XA=X(IA)
     XB=X(IB)
     XC=X(IC)
     YA=Y(IA)
     YB=Y(IB)
     YC=Y(IC)
     II=II+1
     IL=IL+1
     IF(II-INB)718,718,717
718  IF(L-L1)16,16,717
16   IF(II-1)21,21,22
21   LONG1=(N-M+1)*2
     LONG2=(IP-N)*2
     DO 69 I=1,LONG1
     DO 69 J=1,LONG1
69   Q1(I,J)=0.
     GO TO 88
717  WRITE(10'INDK')((Q1(I,J),J=1,30),I=1,30)
     WRITE(11'INDC')((S(I,J),I=1,30),J=1,30)
     LL(L1)=LONG1
     IF(II-INB)1518,1516,1516
1516 WRITE(10'INDK')((Q2(I,J),J=1,30),I=1,30)
     GO TO 5000
1518 LONG1=LONG2
     DO 304 I=1,LONG1
     DO 304 J=1,LONG1
304  Q1(I,J)=Q2(I,J)
     LONG2=2*(IP-N)
88   DO 305 I=1,LONG2
8     DO 305 J=1,LONG2
305  Q2(I,J)=0.
     DO 306 I=1,LONG1
     DO 306 J=1,LONG2
306  S(I,J)=0.
22   DELT=ABS(XB*YC+XA*YB+XC*YA-XB*YA-XC*YB-XA*YC)
     KK=1
     IK=1
     K=1
     L1=L
```

17/05/71

FORTMAIN

```
200 GO TO(1,2,3,89),K
1   XX=YB-YC
   YY=XC-XB
   GO TO110
2   XX=YC-YA
   YY=XA-XC
   GO TO 110
3   XX=YA-YB
   YY=XB-XA
110 BB(1,1)=XX/DELT
   BB(2,1)=0.
   BB(1,2)=0.
   BB(2,2)=YY/DELT
   BB(3,1)=YY/DELT
   BB(3,2)=XX/DELT
   CALL GMPRD(D,BB,SC,3,3,2)
   GO TO(4,51),IK
4   CALL GMTRA(BB,RA,3,2)
51  CALL GMPRD(RA,SC,QA,2,3,2)
   DO 201 I=1,2
   DO 201 J=1,2
201 QA(I,J)=QA(I,J)*T*DELT/2.
   GO TO(61,71,81,91,100,101),KK
61  K=K+1
   LA=1
   IK=2
   KK=KK+1
   IAA=IAI
   IAB=IAI
   DO 500 I=1,3
   DO 500 J=1,2
500 SA(I,J)=SC(I,J)
205 DO 202 I=1,2
   DO 202 J=1,2
   IJ=IAA+I-1
   JI=IAB+J-1
   GO TO(202,502),LA
502 Q1(JI,IJ)=Q1(JI,IJ)+QA(I,J)
202 Q1(IJ,JI)=Q1(IJ,JI)+QA(I,J)
   GO TO 200
71  K=K+1
   LA=2
   IK=2
   KK=KK+1
   IF(IB-N)203,203,204
203 IAA=IAI
   IAB=IBI
   GO TO205
204 IAA=IAI
   IAB=(IB-N)*2-1
207 DO 206 I=1,2
   DO 206 J=1,2
   IJ=IAA+I-1
   JI=IAB+J-1
```

17/05/71

FORTMAIN

```
206  S(IJ,JI)=S(IJ,JI)+QA(I,J)
      GO TO200
81   K=2
      LA=2
      IK=1
      KK=KK+1
      IF(IC-N)208,208,209
208  IAA=IAI
      IAB=ICI
      GO TO205
209  IAA=IAI
      IAB=(IC-N)*2-1
      GO TO207
91   K=K+1
      LA=1
      KK=KK+1
      IK=2
      DO 510 I=1,3
      DO 510 J=1,2
510  SB(I,J)=SC(I,J)
      IF(IB-N)210,210,211
210  IAA=IBI
      IAB=IBI
      GO TO205
211  IAA=(IB-N)*2-1
      IAB=(IB-N)*2-1
212  DO 213 I=1,2
      DO 213 J=1,2
      IJ=IAA+I-1
      JI=IAB+J-1
      GO TO(213,503),LA
503  Q2(JI,IJ)=Q2(JI,IJ)+QA(I,J)
213  Q2(IJ,JI)=Q2(IJ,JI)+QA(I,J)
      GO TO200
100  K=3
      LA=2
      IK=1
      KK=KK+1
      IF(IC-N)214,214,215
214  IAA=(IB-N)*2-1
      IAB=ICI
      GO TO 207
215  IF(IB-N)216,216,217
216  IAA=IBI
      IAB=(IC-N)*2-1
      GO TO207
217  IAA=(IB-N)*2-1
      IAB=(IC-N)*2-1
      GO TO 212
101  K=4
      LA=1
      WRITE(8,'INDB')L,IA,IB,IC,SA,SB,SC
      IF(IC-N)218,218,219
218  IAA=ICI
```

17/05/71

FORTMAIN

```
IAB=ICI
GO TO 205
219 IAA=(IC-N)*2-1
IAB=(IC-N)*2-1
GO TO212
5000 IN=1
LL1=L+1
LL(LL1)=LONG2
WRITE(12'IN')(LL(I),I=1,LL1)
L3=2
STOP
END
```



```

SUBROUTINE PEB2
DIMENSION Z(30,30)
COMMON Q(900),S(900),X(30),SP(900),YP(30),P(30),LL(100)
COMMON INDK,INDC,INDSP,INDYP,INDDP,INDF,L,L1,K,CU,LONG1,LONG2,IN
WRITE(3,1)
1  FORMAT('1',10X,'DEPLACEMENTS DES NOEUDS'////)
   LONG1=LONG2
   INDSP=INDSP-3
   INDYP=INDYP-1
   READ(13'INDSP)((Z(I,J),J=1,30),I=1,30)
   DO 10 I=1, LONG1
   DO 10 J=1, LONG1
      IJ=(I-1)*LONG1+J
10  Q(IJ)=Z(I,J)
   READ(14'INDYP)P
   DO 20 I=1, LONG1
20  X(I)=0.
   GO TO 60
75  LONG2=LONG1
   LONG1=LL(L)
   INDC=INDC-3
   READ(11'INDC)((Z(I,J),I=1,30),J=1,30)
   DO 30 I=1, LONG1
   DO 30 J=1, LONG2
      IJ=(J-1)*LONG1+I
30  S(IJ)=Z(I,J)
   INDC=INDC-3
   INDSP=INDSP-6
   INDYP=INDYP-2
   READ(13'INDSP)((Z(I,J),J=1,30),I=1,30)
   DO 35 I=1, LONG1
   DO 35 J=1, LONG1
      IJ=(I-1)*LONG1+J
35  Q(IJ)=Z(I,J)
   READ(14'INDYP)P
   CALL GMPRD (Q,S,SP, LONG1, LONG1, LONG2)
   CALL GMPRD (SP,YP,X, LONG1, LONG2, 1)
3  FORMAT(5(2X,2E11.4))
2  FORMAT('0','L=',I3)
60  WRITE(3,2)L
   CALL GMPRD(Q,P,SP, LONG1, LONG1, 1)
   CALL GMSUB(SP,X,YP, LONG1, 1)
   INDDP=INDDP-2
   WRITE(12'INDDP)YP
   WRITE(3,3)(YP(I),I=1, LONG1)
   IF(L-1)65,65,70
70  L=L-1
   GO TO 75
65  RETURN
END

```

```
SUBROUTINE PEB1
DIMENSION LM(30),ML(30)
DIMENSION Z(30,30)
COMMON Q(900),S(900),X(30),SP(900),YP(30),P(30),LL(100)
COMMON INDK,INDC,INDSP,INDYP,INDDP,INDF,L,LI,K,CU,LONG1,LONG2,IN
70 LONG1=LONG2
LONG2=LL(L+1)
1 FORMAT(2X,3I10//)
WRITE(3,1)L, LONG1, LONG2
READ(11'INDC)((Z(I,J),I=1,30),J=1,30)
DO 15 I=1, LONG1
DO 15 J=1, LONG2
IJ=(J-1)*LONG1+I
15 SP(IJ)=Z(I,J)
CALL GMTRA(SP,S, LONG1, LONG2)
READ(9'INDF)X
CALL GMPRD(S,Q,SP, LONG2, LONG1, LONG1)
CALL GMPRD(SP,YP,P, LONG2, LONG1, 1)
CALL GMSUB(X,P,YP, LONG2, 1)
WRITE(14'INDYP)YP
CALL GMTRA(S,Q, LONG2, LONG1)
CALL GMPRD(SP,Q,S, LONG2, LONG1, LONG2)
READ(10'INDK)((Z(I,J),I=1,30),J=1,30)
DO 10 I=1, LONG2
DO 10 J=1, LONG2
IJ=(I-1)*LONG2+J
10 SP(IJ)=Z(I,J)
CALL GMSUB(SP,S,Q, LONG2, LONG2)
CALL MINV(Q, LONG2, D, LM, ML)
DO 50 I=1, LONG2
DO 50 J=1, LONG2
IJ=(I-1)*LONG2+J
50 Z(I,J)=Q(IJ)
WRITE(13'INDSP)((Z(I,J),J=1,30),I=1,30)
IF(L-LI)60,65,65
60 L=L+1
GO TO 70
65 L=LI+1
RETURN
END
```

PROGRAMME FILEM

DISK OPERATING SYSTEM/360 FORTRAN 360N-FO-451 CL 3-5

```

SUBROUTINE PEBAP
COMMON Q(900),S(900),X(30),SP(900),YP(30),P(30),LL(100)
COMMON INDK,INDC,INDSP,INDYP,INDDP,INDF,L,L1,K,CU,LONG1,LONG2,IN
DIMENSION Z(30,30)
READ(1,9)L,L1
9  FORMAT(2I4)
KK=0
IN=1
NN=L1+1
READ(8'IN)(LL(I),I=1,NN)
WRITE(3,1)(LL(I),I=1,NN)
1  FORMAT(10(2X,I4,2X)/)
INDF=L
INDYP=L
INDC=3*(L-1)+1
INDSP=INDC
INDK=3*L+1
INDDP=NN+2
LONG2=LL(L)
LONG1=LONG2
READ(13'INDSP)((Z(I,J),J=1,30),I=1,30)
DO 20 I=1, LONG1
DO 20 J=1, LONG1
IJ=(I-1)*LONG1+J
20 Q(IJ)=Z(I,J)
READ(14'INDYP)YP
RETURN
END

```